Höhere WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

http://mstoch.tuwien.ac.at/lv-guide VO: S. Källblad / K. Felsenstein WS 2017

ÜBUNGSBLATT 7

37) Die Stichprobe Y_i mit Verteilung $Y_i \sim F$ und der davon unabhängige Poissonprozess N_t bilden den Compound Poissonprocess $X(t)$. Y habe dieselbe Verteilung $Y \sim F$ und sei von allen Y_i und N_t unabhängig. Man zeige für beliebiges (integrierbares) H die
Compound Poisson Identity

$$\mathbb{E}[X(t)H(X(t))] \;=\; \lambda\, t\, \mathbb{E}[YH(X(t)+Y)].$$

Man wende diese Gleichung für die rekursive Bestimmung von Momenten an:

$$\mathbb{E}(X(t)^n) \;=\; \lambda\, t \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \mathbb{E}(X(t)^k)\; \mathbb{E}(Y^{n-k}) \quad .$$

Hinweis: Man fasse Y als Realisierung Y_{n+1} auf und betrachte die bedingten Erwartungen unter $N_t = n+1$.

38) Die Kovarianzfunktion $\eta_Z(t,s) = \mathsf{cov}(Z_s, Z_t)$ des Prozesses Z_t soll für einen Poissonprozess $Z_t = N_t$ mit Rate λ bzw. auch für einen Compound Poissonprocess $X(t)$ mit einer geometrisch verteilten Stichprobe $Y_i \sim G_\theta$ bestimmt werden.

39) Der Prozeß N_t sei ein conditional Poissonprocess mit eine Exponentialverteilten Rate $\lambda \sim Ex_\theta$. Man bestimme die Verteilung von N_t und $\mathbb{E}N_t$. Sind die Zuwächse von N_t stationär bzw. unabhängig?

40) Man betrachte die bedingte Verteilung der Ankunftszeiten $\tau_1, \ldots, \tau_n$ unter dem Ereignis $N_t = n$ für den Poissonprozess N_t mit Intensität λ.

- **a)** Man bestimme die bedingte Verteilung von $\tau_k | N_t = n$
- **b)** und die gemeinsame Dichte von $(\tau_1, \tau_n) | N_t = n$.
- **c)** man bestimme die Verteilung des *Range of Events* $R := \tau_n - \tau_1$ unter $N_t = n$
- **d)** und die Grenzverteilung für $2n(1-R)$ bei $n \to \infty$.

Hinweis: Man kann die Verteilungen für $t = 1$ bestimmen.

41) Die Zwischenankunftszeiten T_i stammen von N_t , dem conditional Poissonprocess des Beispiels 39). Man bestimme die Verteilung von T_i für $i = 1, 2$. Sind die Folge T_i identisch verteilt bzw. unabhängig ? Welche Momente besitzen die SGn T_i ?

42) Der Erneuerungsprozess N_t sei *verzögert* mit integrierter Tailverteilung

$$F_{tail}(x) \;=\; \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F(y))\, dy$$

als Startverteilung $F_1 = F_{tail}(x)$, $F_i = F, i \geq 2$. Man zeige, dass dieser Erneuerungsprozess N_t genau dann ein homogener Poissonprozess ist, wenn

$$F_{tail}(x) \;=\; F(x) \;.$$