6.Übung Höhere Wahrscheinlichkeitstheorie WS18

1. Lösen Sie die stochastische Differentialgleichung

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t)$$

(Wenden Sie die Ito-Formel auf $Y(t) = \log(X(t))$ an).

2. Bestimmen Sie das stochastische Differential vont $W(t)^3$.

3. $W(t) = (W_1(t), \ldots, W_d(t))$ sei ein d-dimensionaler Wienerprozess, $Y_1, \ldots, Y_d$ quadratintegrierbare progressiv messbare Prozesse mit $Y_1^2 + \ldots + Y_d^2 = 1$. Zeigen Sie, dass

$$\tilde{W}(t) = \int_0^t Y_1(s)dW_1(s) + \ldots + \int_0^t Y_d(s)dW_d(s)$$

ein Wienerprozess ist (es genügt, dass für den Fall zu zeigen, dass die Y_i einfach sind, und dann für eine einzelne Stufe; dort können dann die Y_i als Konstante angesehen werden).

4. $W(t) = (W_1(t), \ldots, W_d(t))$ sei ein d-dimensionaler Wienerprozess. Bestimmen Sie das stochastische Differential von

$$Y(t) = |W(t)| = \sqrt{W_1(t)^2 + \ldots + W_d(t)^2}.$$

Mit dem Wissen aus dem vorigen Beispiel Kann man dieses Differential als

$$dY(t) = \frac{d-1}{Y(t)}dt + d\tilde{W}(t)$$

schreiben.

Der Prozess Y heißt der Besselprozess.

5. W sei ein Wienerprozess. Zeigen Sie, dass

$$U(t) = e^{-ct/2}W(e^{ct})$$

ein stationärer Ornstein-Uhlenbeck Prozess ist.