Höhere WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

http://mstoch.tuwien.ac.at/lv-guide VO: K. Felsenstein / Z. Saffer WS 2019

ÜBUNGSBLATT 1

1) Für die Zufallsvariablen X, Y mit der Dichte $f(x,y) := \frac{1}{x}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,\mathbb{1}_{[0,x]}(y)$ berechne man die bedingten Dichten $f_{X|Y}, f_{Y|X}$ und $\mathbb{E}(X|Y), \mathbb{E}(Y|X)$.

2) Für die Sub-σ-Algebra $\mathfrak{A}$ und die Zufallsvariable X gilt $\mathbb{E}[|X|\ |\mathfrak{A}] < \infty$ f.s. genau dann, wenn es eine Folge paarweise disjunkter Mengen $A_i \in \mathfrak{A}$ gibt mit $\sum_i \mathbf{P}(A_i) = 1$ und für $i \geq 1$

$$\mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{A_i}] \ < \ \infty \ .$$

3) Die stochastischen Größen X, Y, Z seien integrierbar. Gilt dann

$$\mathbb{E}[X|Y,Z] \ = \ \mathbb{E}[X|Z] \ ,$$

falls X und Y unabhängig sind?

4) Die Stochastischen Größen X, Y seien quadratisch integrierbar auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P})$ mit der Sub-σ-Algebra $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{S}$. Man zeige:

$$\mathrm{Var}X \ = \ \mathrm{Var}\mathbb{E}(X|\mathfrak{A}) + \mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X|\mathfrak{A})]^2$$

und folgere dann daraus

$$\mathrm{Var}\mathbb{E}(X|\mathfrak{A}) \leq \mathrm{Var}X$$

5) Die Stochastischen Größen X, Y seien unabhängig und identisch exponentialverteilt, $X \sim Ex_1, Y \sim Ex_1$.
Man bestimme die Verteilung von $Z = \max(X,Y)$ und $\mathbb{E}(X|Z)$ sowie $\mathbb{E}(Z|X)$.
Bemerkung: Der allgemeine Fall n unabhängiger, exponentialverteilter $X_i \sim Ex_1$ könnte völlig analog betrachtet werden.

6) Man zeige die bedingte *Markov-Ungleichung*: Für $\eta : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ monoton wachsend und eine Stochastische Größe X auf $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P})$ und eine sub-σ-Algebra $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{S}$ gilt

$$\mathbf{P}[|X| > \epsilon|\mathfrak{A}] \ \leq \frac{\mathbb{E}[\eta(|X|)|\mathfrak{A}]}{\eta(\epsilon)} \ .$$