Höhere WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

http://mstoch.tuwien.ac.at/lv-guide VO: K. Felsenstein / Z. Saffer WS 2019

ÜBUNGSBLATT 7

32) Die Definitionen 5.1 und 5.3 des (homogenen) Poissonprozesses $N(t)$, $t > 0$ entsprechen einander, man zeige, dass aus 5.1 folgt die Definition 5.3.

33) Für $\lambda_i > 0, i = 1, \ldots, k$ und $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$ seien stochastische Größen Z_i mit Werten in $\mathbb{N}$ und $Z = \sum_{i=1}^{k} Z_i$ definiert. Man zeige, $(Z_1, \ldots, Z_k)$ ist genau dann unabhängig Poisson-verteilt, $Z_i \sim P_{\lambda_i}$, wenn $Z \sim P_\lambda$ Poisson-verteilt ist und $(Z_1, \ldots, Z_k)$ bedingt unter $Z = k$ Multinomial-verteilt $M_{k;p_1,\ldots,p_k}$ mit $p_i = \lambda_i/\lambda$ ist.

34) Wenn $N \sim P_\lambda$ und unabhängig von der iid. Folge X_i, dann besitzt

$$Y \;=\; \sum_{i=1}^{N} X_i$$

eine Compound Poisson Verteilung .

a) Gibt es eine solche iid. Folge X_i, sodass $Y \sim P_\tau$ für jedes $\tau > 0$?

b) Eine diskret auf $\mathbb{N}$ verteilte Größe X mit

$$\mathbf{P}[X = k] \;=\; -\frac{p}{k}\;\frac{1}{\log(1-p)} \qquad \text{für} \qquad k \geq 1,\; 0 < p < 1$$

heisst logarithmisch verteilt. Welche Verteilung besitzt die Compound Poisson Verteilung von Y für logarithmisch verteilte X_i ?

c) Jede solche CP-Verteilung Y ist unbegrenzt teilbar und wenn $X_i \in L_2$ auch asymptotisch normalverteilt.

35) Ein Compound Poissonprocess $X(t)$ ist über einen Poissonprozess $N_t, t > 0$ mit Rate $\lambda > 0$ und einer unabhängigen und identisch verteilten stochastischen Folge Y_i durch

$$X_t \;=\; \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

definiert. Man zeige, dass X_t stationäre und unabhängige Zuwächse besitzt. Es soll für $X(t)$ Mittel $\mathbb{E}X_t$ und Varianz und die Momenterzeugende Funktion bestimmt werden, wenn auch Y_i eine Varianz und eine wohldefinierte Momenterzeugende Funktion besitzt.

36) Der Poissonsche Punktprozess $N(.)$ in $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}^2, \lambda^2)$ hat Rate $\nu > 0$, somit gilt für die Anzahl der Ereignisse in $B \in \mathfrak{B}^2$

$$N(B) \;\sim\; P_\mu \qquad \text{mit} \;\; \mu \;=\; \nu.\, \lambda^2(B)\;.$$

Für einen festen Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ sei X der euklidische Abstand von x zu dem nächstgelegenen Punkt(-Ereignis) von $N(.)$. Man bestimme die Verteilung und Erwartung von X.