35. Sei $G(m,n)$ ein bipartiter Graph mit Knotenklassen $V_1$ und $V_2$, wobei eine vollständige Zuordnung (complete matching) von $V_1$ nach $V_2$ existiert. Zeigen Sie, dass es (zumindest) ein $x \in V_1$ gibt, sodass es zu jeder Kante $xy$ eine (vollständige) Zuordnung von $V_1$ nach $V_2$ gibt, welche $xy$ enthält.

36. Drei Maschinen sollen jeweils einem von vier Standorte kostenminimal zugeordnet werden; an einem Standort kann höchstens eine Maschine aufgestellt werden. Folgende Kosten $c_{ij}$ sind zu beachten:

| $i\backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 13 | 10 | 12 | 11 |
| 2 | 15 | 40 | 13 | 20 |
| 3 | 5 | 7 | 10 | 6 |

Verwenden Sie die ungarische Methode. Fügen Sie eine vierte Dummy Maschine mit Kosten Null ein.

37. A construction company has four large bulldozers located at four different garages. The bulldozers are to be moved to four different construction sites. The distances in miles between the bulldozers and the construction sites are given below.

| Bulldozer \ Site | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 90 | 75 | 75 | 80 |
| 2 | 35 | 85 | 55 | 65 |
| 3 | 125 | 95 | 90 | 105 |
| 4 | 45 | 110 | 95 | 115 |

How should the bulldozers be moved to the construction sites in order to minimize the total distance traveled? Use the Hungarian Method.

Wir haben uns in der Vorlesung primär mit bipartiten (gewichteten) Matchingsaufgaben (Paarungs-, Zuordnungs-) auseinander gesetzt. Betrachten wir nun einen allgemeinen Graphen $G$. Eine Teilmenge $M \subset E(G)$ von **unabhängigen** Kanten nennen wir Matching (Paarung). Weiters definieren wir die Matchingzahl von $G$

$$\mu(G) := max_{\text{M matching in G}} |M|$$

Ein (nicht notwendigerweise eindeutiges) Matching mit $|M| = \mu(G)$ nennen wir maximales Matching.

38. Welche Matchingzahl hat ein Zyklus der Länge $\ell$? Welche Matchingzahl hat ein bipartiter Graph $G(m,n), m \leq n$, der eine vollständige Zuordnung (complete matching) aufweist?

Ein Matching im Graph $G$, welches jeden Knoten von $G$ abdeckt (covered), nennen wir perfektes Matching. Ein Matching $M$, welches nicht perfekt ist, unterteilt die Knotenmenge $V(G)$ in eine von $M$ saturierten Knotenmenge $U$ und die Menge der Knoten $W$, welche von keiner Kante von $M$ abgedeckt (covered) wird; die Knoten von $W$ nennen wir $M$-exponiert.

39. Überlegen Sie sich, dass eine vollständige Zuordnung (complete matching) in einem bipartiten Graphen nicht notwendigerweise eine perfekte Zuordnung (perfect matching), sehr wohl aber eine maximale Zuordnung (maximal matching) ist.

Sei $M$ ein Matching in $G = (V, E)$, so nennen wir einen Pfad $P$, der abwechselnd eine Kante aus $M$ und eine Kante aus $E \backslash M$ aufweist, einen $M$-alternierenden Pfad ($M$-alternating path). Sind überdies beide Endknoten von $P$ in $M$ exponiert, so nennen wir $P$ einen $M$-erweiterten Pfad ($M$-augmented path).

40. Sei $M$ ein Matching in $G = (V, E)$ und $P$ ein $M$-alternierender Pfad. Zeigen Sie, dass die symmetrische Differenz der beiden Mengen $M$ und $E(P)$ wiederum ein Matching ist. Weiters zeigen Sie, dass die symmetrische Differenz die Mächtigkeit $|M| - 1 + r$ hat, wobei $r$ gleich der Anzahl der $M$-exponierten Knoten in $P$ ist.

    Hinweis: die symmetrische Differenz von zwei Mengen ist die Vereinigung ohne dem Durchschnitt dieser Menge.

41. (freiwillig, kommt nicht zum Test) Ein Matching $M$ ist dann und nur dann maximal, wenn es keinen $M$-erweiterten Pfad gibt.

Hinweis: Der zweite Übungstest ist am Fr. 16.1.2015 um 12:30 FH HS 7 geplant.