1. Lösen Sie mit Hilfe des Simplex-Algorithmus:

$$\min x_1 - 4x_2$$

unter den NBen

$$\begin{array}{rcrcr} -3x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

sowie der 'NNB'

$$x_2 \geq -3$$

(Hinweis: Um eine passende Form für den Simplex-Algorithmus zu erhalten, ersetzen Sie die erste Variable durch die Differenz zweier vorzeichenbeschränkter Variablen und substituieren Sie die zweite Variable entsprechend.)

2. Der Simplex-Algorithmus wird nach einigen Schritten abbrechen. Was sagt dann das letzte berechnete Tableau über die Lösung des LPs aus?

$$\max 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

unter den NBen

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & \leq & 20 \\ -4x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & \leq & 40 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 8x_4 & \leq & 50 \end{array}$$

sowie den NNBen

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

3. Lösen Sie das nächstfolgende Beispiel mit Hilfe des Simplex-Algorithmus sowie mittels graphischer Analyse.

$$\max 2x_1 + 3x_2$$

unter den NBen

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \end{array}$$

sowie den NNBen

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

4. Lösen Sie das nächstfolgende Beispiel mit Hilfe des Simplex-Algorithmus sowie mittels graphischer Analyse.

$$\max 2x_1 + 3x_2$$

unter den NBen

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & + & x_2 & = & 3 \end{array}$$

sowie den NNBen

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

5. Lösen Sie das nächstfolgende Beispiel mit Hilfe des Simplex-Algorithmus sowie mittels graphischer Analyse.

$$\min x_1 + x_2$$

unter den NBen

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & & & \leq & 4 \\ x_1 & + & x_2 & \geq & 5 \\ x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \end{array}$$

sowie den NNBen

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

6. Lösen Sie mit Hilfe des Simplex-Algorithmus:

$$\max 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$$

unter den NBen

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & 2x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ -2x_1 & & & + & 3x_3 & \leq & 3 \\ x_1 & - & 3x_2 & & & \geq & -4 \end{array}$$

sowie den NNBen

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

7. Ermitteln Sie das duale LP zu

$$\max 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$$

unter den NBen

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & 2x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ -2x_1 & & & + & 3x_3 & \leq & 3 \\ x_1 & - & 3x_2 & & & \geq & -4 \end{array}$$

sowie den NNBen

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

und lösen Sie das duale LP mit Simplex-Algorithmus.

8. Die Firma Stone erzeugt Stoßdämpfer für Autos (KFZ) und Lastwägen (LKW). Jeder Stoßdämpfer wird in 2 Arbeitsschritten erzeugt: Fertigung der Einzelteile und Endmontage. Jeder KFZ-Stoßdämpfer benötigt 16 Einheiten Fertigung und 10 Einheiten Endmontage, während jeder LKW-Stoßdämpfer 24 Einheiten Fertigung und 20 Einheiten Montage beansprucht. Wöchentlich stehen maximal 480 Einheiten Fertigung und 360 Einheiten Endmontage zur Verfügung. Die Nachfrage nach Stoßdämpfern ist groß genug, sodaß jeder erzeugte Stoßdämpfer auch verkauft werden kann. Die Verkaufspreise betragen \$50 für KFZ- und \$60 pro LKW-Stoßdämpfer. Ein Vertrag mit Jaguar verpflichtet Stone zur Auslieferung von wöchentlich 12 KFZ- und 8 LKW-Stoßdämpfern. Ermitteln Sie mittels Simplexverfahren einen Produktionsplan, der den Erlös maximiert.

9. Der Simplex-Algorithmus wird nach einigen Schritten abbrechen. Was sagt das letzte berechnete Tableau über den zulässigen Bereich des LPs aus?

$$\max 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4$$

unter den NBen

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 4x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & -2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \end{array}$$

sowie den NNBen

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

10. Gegeben sei das (primale) LP-Problem (P):

$$\max z\,(\underline{x}) = 6x_1 + 2x_2 + x_3$$

sodaß

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & & & \leq & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

(a) Man formuliere das duale Problem (D).

(b) Man zeige graphisch, daß $y_1 = y_2 = 2$ die optimale Lösung von (D) ist.

(c) Man formuliere den Satz vom komplementären Schlupf (das Gleichgewichtstheorem) für dieses Beispiel.

(d) Aus (b) und (c) ermittle man die optimale Lösung von (P).