TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

Übungsblatt 1: Anfangsbedingungen

Berechnung der Anfangsbedingungen als Funktion der Kepler-Elemente

Gegeben ist eine RINEX Navigation Message für den Galileo-Satelliten E14.

```
E14 2021 01 01 00 00 00-1.279063988477E-03-1.305977548327E-11 0.000000000000E+00
     8.200000000000E+01 5.343750000000E+01 6.879215118351E-09-6.634019283932E-01
     2.892687916756E-06 1.656934486236E-01 5.951151251793E-06 5.289319812775E+03
     4.332000000000E+05-2.291053533554E-06-1.803591550142E+00-8.605420589447E-07
     8.822988609119E-01 2.423125000000E+02 1.861060110064E+00-1.165548549776E-08
     8.189626845116E-10 2.580000000000E+02 2.138000000000E+03
     3.120000000000E+00 0.000000000000E+00-3.026798367500E-09 0.000000000000E+00
     4.341900000000E+05
```

1. Entnehmen Sie dieser Message folgende Bahnelemente:

Anfangszeitpunkt [hh:mm:ss]	t_0	=	
Mittlere Anomalie zur Referenzzeit [rad]	M_0	=	
numerische Exzentrizität []	e	=	
Große Halbachse [m]	a	=	
RA des aufsteigenden Knotens [rad]	Ω	=	
Inklination [rad]	i	=	
Argument des Perigäums [rad]	ω	=	

2. Berechnen Sie unter Annahme eines reinen Zweikörperproblems (keine Störkräfte)

   a) die Umlaufzeit U des Satelliten
   b) die wahre Anomalie v aus der Ellipsengeometrie zum Zeitpunkt t
   c) den Radiusvektor (Satellitenentfernung vom Gravitationszentrum) zum Zeitpunkt t
   d) den Positions- und Geschwindigkeitsvektor in der Äquatorebene
   e) Kontrolle: Berechnung der Bahnelemente aus den Anfangsbedingungen

gesuchter Zeitpunkt [hh:mm:ss]	t	=	00:15:00 Galileo Zeit
geozentrische Gravitationskonstante $[m^3/s^2]$	GE	=	3.986005e14

a) Umlaufzeit U (2.11b)

$$U = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GE} a^3} =$$ s

b) wahre Anomalie v (2.19)-(2.21)

$$n = \sqrt{GE/a^3} =$$ rad/s

$$M = M_0 + n \cdot (t - t_0) =$$ rad

$$E_l = M \quad \text{für } l = 1$$

$$E_{l+1} = M + e \sin E_l \quad \text{für } l = 2, 3, ...$$

$$E_l =$$

$$M - E_l + e \sin E_l = 0 \quad \text{(Kontrolle)}$$

$$v = 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}\right) =$$ rad

c) Radius $\boldsymbol{r}$ (1.2)

$$r = \left(\frac{a(1-e^2)}{1 + e \cos v}\right) \cdot 0.001$$ km

d) Anfangsbedingungen
Positions- und Geschwindigkeitsvektor (in der Bahnebene) (2.22)

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} r \cos v \\ r \sin v \\ 0 \end{pmatrix} =$$ km

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} -\sqrt{GE/p} \sin v \\ \sqrt{GE/p}(e + \cos v) \\ 0 \end{pmatrix} =$$ m/s

Positions- und Geschwindigkeitsvektor (in der Äquatorebene) (2.23)

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}_z(-\Omega) \cdot \boldsymbol{R}_x(-i) \cdot \boldsymbol{R}_z(-\omega) \cdot \tilde{\boldsymbol{r}} =$$ km

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{R}_z(-\Omega) \cdot \boldsymbol{R}_x(-i) \cdot \boldsymbol{R}_z(-\omega) \cdot \tilde{\boldsymbol{v}} =$$ m/s

mit

$$\boldsymbol{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix},\ \boldsymbol{R}_y = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix},\ \boldsymbol{R}_z = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Kontrolle: Berechnung der 6 Bahnelemente aus den Anfangsbedingungen, (2.14)-(2.17)

$$\Omega = \arctan 2\,(h_x, -h_y) =$$ rad

mit $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{v}(t)$

$$i = \arccos\frac{h_z}{h} =$$ rad

$$e = \frac{q}{GE} =$$

mit $\boldsymbol{q} = -\Big(\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{v} + GE\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\Big)$

$$a = \frac{p}{1-e^2} =$$ m

mit $p = \dfrac{h^2}{GE}$

$$\omega = \arctan 2\,(\tilde{\boldsymbol{q}}_y, \tilde{\boldsymbol{q}}_x) =$$ rad

mit $\tilde{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{R}_x(i) \cdot \boldsymbol{R}_z(\Omega) \cdot \boldsymbol{q}$

$$v = \arctan 2\,(\tilde{\boldsymbol{r}}_y, \tilde{\boldsymbol{r}}_x) =$$ rad

mit $\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{R}_z(\omega) \cdot \boldsymbol{R}_x(i) \cdot \boldsymbol{R}_z(\Omega) \cdot \boldsymbol{r}$