1. **Anfangsbedingungen:** man bestimme allgemein die **Auslenkung $x(t)$** eines gedämpften harmonischen Oszillators mit der **Anfangsauslenkung $x(t=0)=x_0$** und **der Anfangsgeschwindigkeit $v\ (t=0)=0$** für

a) starke Dämpfung *(Lösung: $x(t)=\mathrm{e}^{-\gamma t}\left[\frac{x_0(\omega+\gamma)}{2\omega}\mathrm{e}^{\omega t}+\frac{x_0(\omega-\gamma)}{2\omega}\mathrm{e}^{-\omega t}\right],\ \omega=\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$)*

b) den aperiodischen Grenzfall *(Lösung: $x(t)=x_0[1+\gamma t]\mathrm{e}^{-\gamma t}$)*

c) schwache Dämpfung *(Lösung.: $x(t)=\frac{x_0}{\cos\left[\arctan\left(-\frac{\gamma}{\omega}\right)\right]}\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos\left[\omega t+\arctan\left(-\frac{\gamma}{\omega}\right)\right],\ \omega=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$).*

2. Eine masselose Feder, an der *kein* Gewicht befestigt ist, hängt von der Decke herab. Ihre *Länge* beträgt **l = 20 cm.** Nun wird eine Masse **m** am unteren Ende der Feder angebracht. Wir unterstützen zunächst das Massestück mit der Hand, sodaß die Feder ungespannt ist. Dann entfernen wir die Hand ruckartig – die Masse und die Feder beginnen zu schwingen. Der tiefste Punkt, den die Masse während der Schwingungen erreicht, liegt **10 cm** unterhalb der **Ausgangslage**.

a) Wie groß ist die Schwingungsfrequenz? *(Lösung.: f = 2,23 Hz)*

b) Wie groß ist die Geschwindigkeit, wenn die Masse sich **5 cm** unterhalb ihrer **Ausgangslage** befindet? *(Lösung.: f = 70 cms^{-1})*

Nun wird eine zweite Masse mit **30 dag** zur ersten hinzugefügt, was eine Gesamtmasse von **m + 30 dag** ergibt. Wenn dieses System schwingt, so ist seine Frequenz halb so groß wie die der Masse **m** allein.

c) Wie groß ist **m**? *(Lösung.: m = 10 dag)*

d) Wo ist die neue Gleichgewichtslage? *(Lösung.:* 15 cm unterhalb der alten Lage*)*

3. Der **Quotient zweier aufeinanderfolgender Amplituden** eines Massenpunktes ist **2**. Die Periodendauer der gedämpften Schwingung beträgt **T = 0,5 s**.

a) Berechnen Sie das **logarithmische Dekrement δ**, sowie den **Dämpfungskoeffizienten γ**. *(Lösung.: δ = 0,693, γ = 1,386 s^{-1})*

b) Wie groß wäre die Periodendauer **T** der *ungedämpften Schwingung* ? *(Lösung.: T = 0,497 s)*

4. **Wägung mittels Frequenzverschiebung:** Erfährt ein harmonischer Oszillator (Federkonstante D) mit der Eigen(kreis)frequenz ω_0 einen Massenzuwachs um Δm, so ändert sich die Eigen(kreis)frequenz von ω_0 auf ω_1.

a) Man berechne allgemein Δm in Abhängigkeit von der Änderung der Eigen(kreis)frequenz.

b) Man berechne Δm für **D = 10 kNcm^{-1}** wenn sich die Frequenz von **f_0 = 10 MHz** auf **f_1 = 9,5 MHz** verschiebt. *(Lösung.: Δm = 00426 µg)*

Bitte Seite wenden!

5. **Ungedämpfte und gedämpfte Schwingungen:** Der Puffer eines westeuropäischen Eisenbahnwaggons besteht aus einer Feder (Federkonstante $D = 50\ \mathrm{kNcm^{-1}}$) und einem Dämpfelement (Dämpfungskonstante γ). Auf diesen, mittels einer Feststellbremse fixierten Waggon prallt ein zweiter Waggon der Masse $M = 50$ t (ein russisches Modell ohne gefederten Puffer) mit der **Geschwindigkeit** v_0 auf.

a) Man berechne die **Eigenkreisfrequenz** Ω_0 und die Amplitude A eines ungedämpften Puffers ($\gamma = 0$) für die Aufprallgeschwindigkeit $v_0 = 20\ \mathrm{kmh^{-1}}$.
b) Man gebe die vollständige Bewegungsgleichung dieser freien Schwingung an. Annahme: der aufprallende Waggon und der Puffer sind nach dem Aufprall für alle Zeiten fix verbunden. Warum muss diese unrealistische Annahme getroffen werden?
c) Der maximale Federweg des Puffers sei mit 15 cm definiert. Bleibt der maximale Federweg bei einer Dämpfungskonstante $\gamma = 8\ \mathrm{s^{-1}}$ für $v_0 = 20\ \mathrm{kmh^{-1}}$ unter diesem Grenzwert?

Hinweise: Allgemeine Lösung der gedämpften Schwingung: $x(t) = e^{-\gamma t}\cdot(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))$, *mit* $\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}$ *. Als maximaler Federweg ist das erste Maximum der gedämpften Schwingung zu verstehen. Zu überlegen ist, zu welcher Zeit dieses Maximum erreicht wird.*

6. Entwickeln Sie die Funktion $f(t) = |\sin t|$ in eine **Fourier-Reihe** der Form

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\right)\cdot$$