Grundlagen der Physik 2
Lösung zu Übungsblatt 10

Daniel Weiss

31. Mai 2010

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

a) Die Saite sei durch die Kraft σ an beiden Enden entlang der z-Achse eingespannt. Annahme: Die Auslenkung in jedem Punkt z ist zu jeder Zeit klein und die Saite wird nur transversal ausgelenkt. Die auf die Saite wirkende Rückstellkraft (orthogonal zur z-Achse) ist die Differenz aus F_2 und F_1. Die Gesamtrückstellkraft ist somit:

$$ma = \rho L q \frac{\partial^2 \mathrm{x}}{\partial \mathrm{t}^2}(z,t) = \sigma(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \tag{1}$$

Da wir von kleinen Auslenkungen ausgegangen sind, gelten folgende Näherungen:

$$\sin(\theta) \approx \tan(\theta) \tag{2}$$

$$\cos(\theta) \approx 1 \tag{3}$$

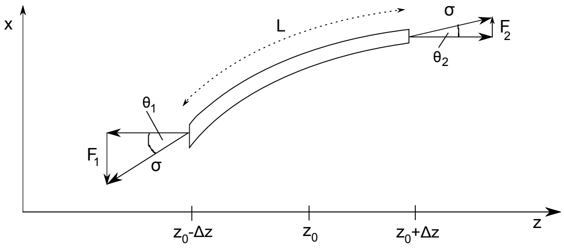

Abbildung 1: ausgelenkte Saite

Das führt zu:

$$\rho L q \frac{\partial^2 \mathrm{x}}{\partial \mathrm{t}^2}(z,t) = \sigma \left(\frac{\tan(\theta_2) - \tan(\theta_1)}{\cos(\theta)} \right) \tag{4}$$

Nun ist aber der Tangens genau die Steigung der Tangente am jeweiligen Winkel θ und der Kosinus setzt L und Δz miteinander in Beziehung:

$$\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{z}}(z_0 - \Delta z, t) = \tan(\theta_1) = \tan(\theta(z_0 - \Delta z, t)) \tag{5}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\Delta z}{L} \tag{6}$$

Hierbei wurde $\theta(z_0 - \Delta z, t) := \theta_1$ verwendet. Diese Beziehungen kann man nun in Gleichung 4 einsetzen:

$$\rho L q \frac{\partial^2 \mathrm{x}}{\partial \mathrm{t}^2}(z,t) = \sigma \left(\frac{\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{z}}(z_0 + \Delta z, t) - \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{z}}(z_0 - \Delta z, t)}{\frac{\Delta z}{L}} \right) \tag{7}$$

Das lässt sich noch vereinfachen zu:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{x}}{\partial \mathrm{t}^2}(z,t) = \frac{\sigma}{\rho q} \frac{\partial^2 \mathrm{x}}{\partial \mathrm{z}^2}(z,t) \tag{8}$$

Der Faktor $\frac{\sigma}{\rho q}$ hat die Einheit $\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$ und ist das Quadrat der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle. Als endgültige Gleichung folgt:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{x}}{\partial \mathrm{t}^2}(z,t) = c^2 \frac{\partial^2 \mathrm{x}}{\partial \mathrm{z}^2}(z,t) \tag{9}$$

b) Für die Saite muss gelten:

$$x(0,0) := 0 \tag{10}$$

$$x(L,0) := 0 \tag{11}$$

$$\dot{x}(0,0) := v_0 \tag{12}$$

c) Allgemeiner Ansatz:

$$x(z,t) := Ce^{i(\alpha z - \omega t)} \tag{13}$$

Daraus ergibt sich für das charakteristische Polynom:

$$\alpha = \frac{\pm\omega}{c} \tag{14}$$

Somit ist die allgemeine Lösung für $x(z,t)$:

$$x(z,t) = C_1 e^{i(\frac{\omega}{c} - \omega t)} + C_2 e^{-i(\frac{\omega}{c} - \omega t)} \tag{15}$$

Mit (10):

$$C_1 = -C_2 \tag{16}$$

und mit (11):

$$C_1 e^{i\frac{\omega}{c}L} - C_1 e^{-i\frac{\omega}{c}L} = 0 \Rightarrow \frac{\omega}{c}L = n\pi \Rightarrow \omega = n\pi\frac{c}{L} \tag{17}$$

mit $n \in \mathbb{N}$. Schließlich liefert die Anfangsbedingung 12 einen Wert für die Konstante C_1.

$$C_1 = \frac{v_0}{2i\omega} \tag{18}$$

Daraus folgt schließlich für die Gesamtlösung:

$$x(z,t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\left(\frac{\omega}{c}z - \omega t\right) \tag{19}$$

Die Dispersionsrelation ist die Beziehung zwischen Kreisfrequenz ω und Kreiswellenzahl k. Es ist:

$$\omega = \frac{n\pi c}{L} = \frac{2n\pi^2\lambda f}{2\pi L} = \frac{2n\pi^2 f}{kL} = \frac{\omega n\pi}{kL} \Rightarrow \omega = c \cdot k \tag{20}$$

d) Es wurde bereits aus den Anfangsbedingungen bestimmt:

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{n\pi c}{L} && (21)\\ \Leftrightarrow 2\pi f_n &= \frac{n\pi\lambda_n f_n}{L} \\ \Leftrightarrow 2 &= \frac{n\lambda_n}{L} \\ \Leftrightarrow \lambda_n &= \frac{2L}{n} && (22) \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Es gilt die Beziehung

$$c = \lambda f \tag{23}$$

Es soll nun im Stahlstab eine stehende Welle zustande kommen, also

$$f = \frac{c_{\text{Stahl}}}{\lambda_{\text{Stahl}}} = \frac{c_{\text{Stahl}}}{l} \tag{24}$$

Daraus lässt sich die Schallgeschwindigkeit in Wasserstoff bestimmen, da sich lediglich die Wellenlänge ändert - die Frequenz bleibt gleich.

$$c_{\text{Wasserstoff}} = df = d\frac{c_{\text{Stahl}}}{l} = 1272\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{25}$$

Aufgabe 3

Wenn die Auslenkung an jedem Ort 0 ist, entspricht die gesamte Schwingungsenergie der Saite der kinetischen Energie. Es gilt

$$E_n = \frac{1}{2}m\dot{x_n}^2 = \frac{1}{2}m(-A\omega_n \cos(kz - \omega_n t))^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_n^2 \tag{26}$$

Mit

$$z = ct \Rightarrow \cos(kz - \omega t) = 1 \tag{27}$$

Aufgabe 4

a) Die drei stehenden Wellenarten schauen so aus:

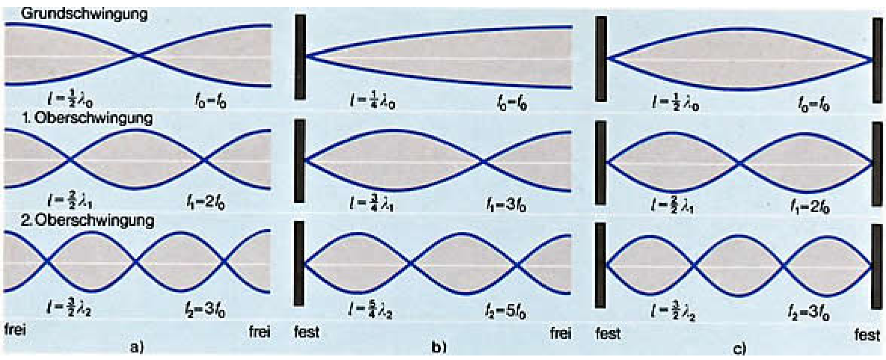

Abbildung 2: Fall a: zwei offene Enden, b: links geschlossen - rechts offen, c: beide Enden geschlossen

b) Die Fälle der beidseitig offenen Orgelpfeife und der beidseitig geschlossenen sind die Frequenz bezüglich äquivalent. Es gilt hier:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \Rightarrow f_n = n\frac{c}{2L} \tag{28}$$

Für den Fall der halboffenen Pfeife:

$$\lambda_n = \frac{4L}{2n-1} \Rightarrow f_n = (2n-1)\frac{c}{4L} \tag{29}$$

Hierbei ist c die Phasengeschwindigkeit der Welle. Mit $l = 60\text{cm}$ ergeben sich die Frequenzen der Grundschwingungen:

$$f_a = f_c = 283\text{Hz} \tag{30}$$
$$f_b = 142\text{Hz} \tag{31}$$

Demnach klingt die offene Orgelpfeife höher als die halboffene.

c) Annahme: Die tiefste hörbare Frequenz sei $f_0 = 19\text{Hz}$.

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{340\frac{\text{m}}{\text{s}}}{19\text{Hz}} = 17{,}9\text{m} \tag{32}$$

Der Raum ist ähnlich einer geschlossenen Orgelpfeife:

$$L = \frac{\lambda}{2} = 8{,}9\text{m} \tag{33}$$

Aufgabe 5

$$l_1 = 21{,}\text{cm} \tag{34}$$
$$l_2 = 66{,}4\text{cm} \tag{35}$$

Aus Aufgabe 4 (halboffener Fall):

$$L = \frac{2n-1}{4}\lambda \Rightarrow L_{n+1} - L_n = \frac{2n+1}{4}\lambda - \frac{2n-1}{4}\lambda = \frac{1}{2}\lambda_n \Rightarrow \lambda = 2\Delta L \tag{36}$$

Daraus folgt die Schallgeschwindigkeit:

$$c = \lambda f = 2\Delta L f = 342\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{37}$$

Aufgabe 6

Die Fouriertransformierte der Rechtecksfunktion ist

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,\text{dt} = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A_0 e^{i\omega t} = \frac{2A_0}{\omega}\sin\left(\frac{\tau}{2}\omega\right) \tag{38}$$

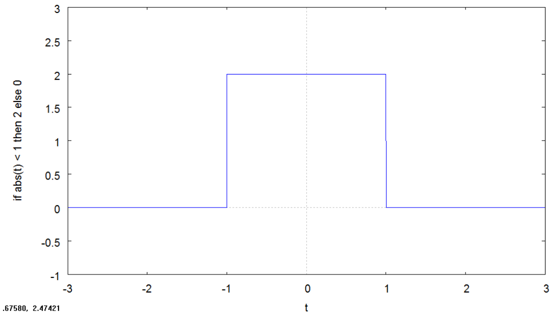

Abbildung 3: Rechteckfunktion mit $\tau = 2, A_0 = 2$

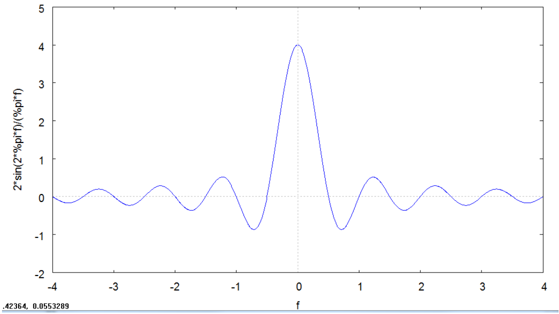

Abbildung 4: Fouriertransformierte in Abh. der Frequenz mit $\tau = 2, A_0 = 2$