Grundlagen der Physik 2
Lösung zu Übungsblatt 12

Daniel Weiss

13. Juni 2010

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

a) Bei senkrechtem Einfall gilt laut dem Snelliusschen Brechungsgesetz:

$$n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\beta) \text{ also: } \alpha = 0 \Rightarrow \beta = 0 \tag{1}$$

Einsetzen in die Formeln von Fresnel liefert:

$$R_\mathrm{s} = R\mathrm{p} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \tag{2}$$

b) Es gilt:

$$T = 1 - R = 1 - \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} = \frac{(n_1 + n_2)^2 - (n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} \overset{3.Binom}{=}$$
$$= \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \tag{3}$$

c)

$$T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = \frac{4 \cdot 1{,}5}{2{,}5^2} = 0{,}96 = 96\% \tag{4}$$
$$R = 1 - T = 0{,}04 = 4\% \tag{5}$$

d) Es soll gelten

$$A_{\mathrm{rp}} = 0 \Rightarrow R_{\mathrm{p}} = 0 \Rightarrow n_2 \cos(\alpha) - n_1 \cos(\beta) = 0 \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} \tag{6}$$

Zusätzlich soll das Brechungsgesetz von Snellius gelten.

$$\Rightarrow \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$$
$$\Leftrightarrow \sin(\alpha)\cos(\alpha) = \sin(\beta)\cos(\beta)$$

Mit den Additionstheoremen folgt:

$$\Leftrightarrow \sin(2\alpha) = \sin(2\beta) \tag{7}$$

Hier ist nun zu beachten, dass die Arkuskosinusfunktion keine eindeutige Zuordnung eines Winkels zu einer Zahl ermöglicht, sondern vielmehr einer beliebigen Zahl zwischen -1 und 1 eine unendliche Anzahl an Winkeln zuordnet. Die Skizze

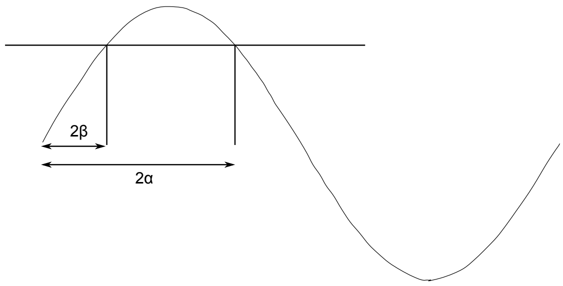

Abbildung 1: Gleicher Sinus bei unterschiedlichen Winkeln

veranschaulicht das. Daraus kann man direkt ablesen, dass

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \tag{8}$$

sein muss.

e) Aus Gleichung 6 folgt sofort die Beziehung:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{n_1}{n_2}\cos(\beta)\right) \tag{9}$$

Zusammen mit der in Teilaufgabe d) gefundenen Beziehung zwischen α und β folgt:

$$\begin{aligned}
\alpha = \arccos\left(\frac{n_1}{n_2}\cos(\beta)\right) &= \frac{\pi}{2} - \beta \\
\frac{n_1}{n_2}\cos(\beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \\
\frac{n_1}{n_2}\cos(\beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\beta) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(\beta) \\
\frac{n_1}{n_2} &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\tan(\beta) \\
\frac{n_1}{n_2} &= \tan(\beta) \\
\Rightarrow \alpha &= \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \qquad (10)
\end{aligned}$$

Beim letzten Schritt wurde verwendet, dass

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{1}{\tan(\beta)} \tag{11}$$

gilt.

f)

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1{,}5}{1}\right) = 56{,}3^\circ \tag{12}$$

Aufgabe 2

a) Ausgehend von den Fresnelformeln wie in Aufgabe 1 angegeben lässt sich durch Einsetzen des jeweiligen komplexen Brechungsindex' der Reflexionskoeffizient für Metalle berechnen. Hierbei zu beachten ist, dass das Quadrat in der Formel ein Produkt mit dem komplex konjugierten Wert darstellt. Es ergibt sich somit:

$$R = \frac{(n_1 - n' + i\kappa)(n_1 - n' - i\kappa)}{(n_1 + n' - i\kappa)(n_1 + n' + i\kappa)} = \frac{(n_1 - n')^2 + \kappa^2}{(n_1 + n')^2 + \kappa^2} \tag{13}$$

b)

$$R_{600} = 0{,}92 = 92\% \tag{14}$$

c)

$$R_{500} = 0{,}65 = 65\% \tag{15}$$
$$R_{1000} = 0{,}99 = 99\% \tag{16}$$

Daraus folgt, dass Aluminium bei sichtbarem Licht besser reflektiert als Kupfer und die Reflektivität mit steigender Wellenlänge zunimmt. Kupfer ist z.B. für infrarotes Licht beinahe ideal reflektierend. Also ein nahezu idealer Spiegel.

Aufgabe 3

Es soll gelten (siehe Skizze):

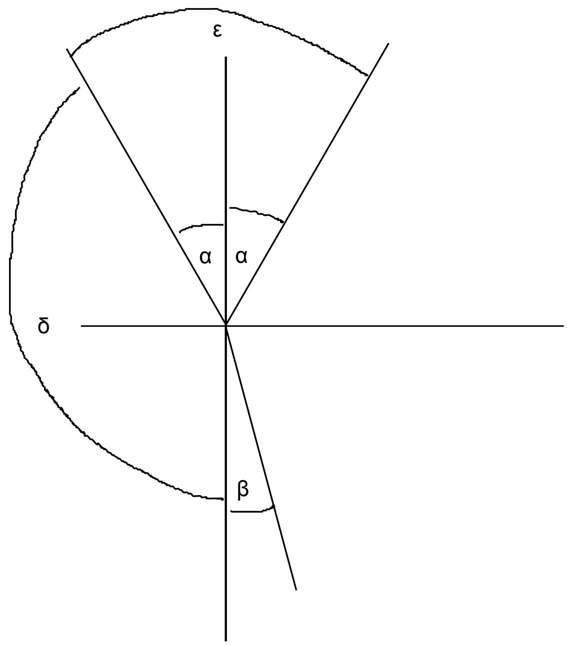

Abbildung 2: Winkelbeziehungen

$$\epsilon = 2\alpha \stackrel{!}{=} \pi - \alpha + \beta = \delta + \beta \Rightarrow 3\alpha = \pi + \beta \tag{17}$$

Es gilt nun also mit dieser Formel und dem Brechungsgesetz von Snellius:

$$\beta = 3\alpha - \pi \tag{18}$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin(\alpha)\right) \tag{19}$$

$$3\alpha - \pi = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin(\alpha)\right) \tag{20}$$

mit n_1 und n_2 als Brechungsindizes von Luft bzw. Glas. Diese Gleichung kann nun mit den Additionstheoremen gelöst werden.

$$\begin{aligned}
3\alpha - \pi &= \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin(\alpha)\right) \\
\sin(3\alpha - \pi) &= \frac{n_1}{n_2}\sin(\alpha) \\
\sin(3\alpha) &= -\frac{n_1}{n_2}\sin(\alpha) \\
\sin(2\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(2\alpha) &= -\frac{n_1}{n_2}\sin(\alpha) \\
2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) + \sin(\alpha)\big(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\big) &= -\frac{n_1}{n_2}\sin(\alpha) \\
3\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) - \sin^3(\alpha) &= -\frac{n_1}{n_2}\sin(\alpha) \\
3\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) &= -\frac{n_1}{n_2} \\
4\cos^2(\alpha) - 1 &= -\frac{n_1}{n_2} \\
\cos(\alpha) &= \sqrt{\frac{1 - \frac{n_1}{n_2}}{4}} = 73,22^\circ \qquad (21)
\end{aligned}$$

Dabei wurden folgende Additionstheoreme verwendet:

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x) \qquad (22)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \qquad (23)$$

$$-\sin^2(x) = -1 + \cos^2(x) \qquad (24)$$

Aufgabe 4

a) Nehmen wir an ein Gegenstand, der im unendlichen vor Linse 1 steht, soll abgebildet werden. Mit der Linsengleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \qquad (25)$$

erhalten wir für das Bild, das von der Linse 1 erzeugt wird folgende Beziehung:

$$b_1 = f_1 \qquad (26)$$

Für die Gegenstandsweite der zweiten Linse ergibt sich daher mit dem Abstand d zwischen den beiden Linsen

$$g_2 = d - b_1 = d - f_1 \qquad (27)$$

Damit kann man die Bildweite bezüglich der zweiten (konkaven) Linse bestimmen.

$$b_2 = \frac{1}{\frac{1}{f_2} - \frac{1}{g_2}} = \frac{g_2 \cdot f_2}{g_2 - f_2} = \frac{(d - f_1) \cdot f_2}{d - f_1 - f_2} = \frac{(f_1 - d) \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d} \tag{28}$$

Nun möchte ich aber eine Gleichung, bei der der Abstand d zwischen beiden Linsen bei der Gegenstandsweite bzw. Bildweite nicht berücksichtigt werden muss und ich sozusagen als Ersatzlinsensystem nur eine einzige Linse benutzen kann um die Rechnung zu vereinfachen. Um dies zu erreichen muss man in der obigen Rechnung die Gegenstandsweite der zweiten Linse in Bezug auf die erste Linse angeben. Also

$$g_2' = -f_1 \tag{29}$$

Dadurch erhalte ich eine "neue" Bildweite die nun der Brennweite des Linsensystems entspricht (da der Gegenstand im unendlichen liegt):

$$b_2' = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} =: f \tag{30}$$

Rechnet man andersherum; startet man also mit einem Gegenstand im unendlichen vor der zweiten Linse erhält man diesselbe Gleichung wie in (28) nur das f_1 und f_2 jeweils vertauscht sind. Durch Beziehen der Gegenstandsweite der ersten Linse auf die zweite ergibt sich dasselbe Ergebnis für die Brennweite. Mit den angegebenen Werten erhält man als Brennweite des Systems:

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} = \frac{30\text{mm} \cdot (-7{,}5\text{mm})}{30\text{mm} - 7{,}5\text{mm} - 24\text{mm}} = 150\text{mm} \tag{31}$$

Diese Brennweite bezieht sich allerdings NICHT auf eine der beiden Linsen, sondern auf eine der jeweils zwei Hauptebenen, die zum Beschreiben des Systems eingeführt werden müssen. Die Brechung an diesen Hauptebenen ist analog zu der einer dicken Linse.

b) Die Bildweite b_2 der zweiten Linse entspricht im in a) gerechneten Beispiel dem Brennpunkt F' bezüglich der zweiten Linse. Addieren des Abstandes der ersten Linse ergibt den gesuchten Wert l:

$$l = b_2 + d = \frac{(f_1 - d) \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d} + d = 54\text{mm} \tag{32}$$

Aufgabe 5

Mit der Linsenformel

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \tag{33}$$

kann nun "rückwärts" gerechnet werden. Es gilt:

$$g_1 = \frac{1}{\frac{1}{f_1} - \frac{1}{b_1}} = \frac{f_1 b_1}{b_1 - f_1} \tag{34}$$

Weiterhin gilt analog für das Okular:

$$g_2 = \frac{f_2 b_2}{b_2 - f_2} \tag{35}$$

Mit der Beziehung

$$b_1 = s - g_2 \tag{36}$$

können diese beiden Gleichungen nun verknüpft werden und nach ein wenig Algebra erhält man:

$$g_1 = \frac{f_1(b_2(s - f_2) - f_2 s)}{b_2(s - f_1 - f_2) - f_2(s - f_1)} = 3{,}07\text{mm} \tag{37}$$

Aufgabe 6

a) Auf der Skizze (siehe auch Aufgabenblatt) erkennt man, dass der Radius zusammen mit dem Rohrdurchmesser zum einen und mit dem halben Rohrdurchmesser zum anderen ein rechtwinkliges Dreieck bildet, über das der Winkel α bestimmt werden kann. Es gilt offensichtlich

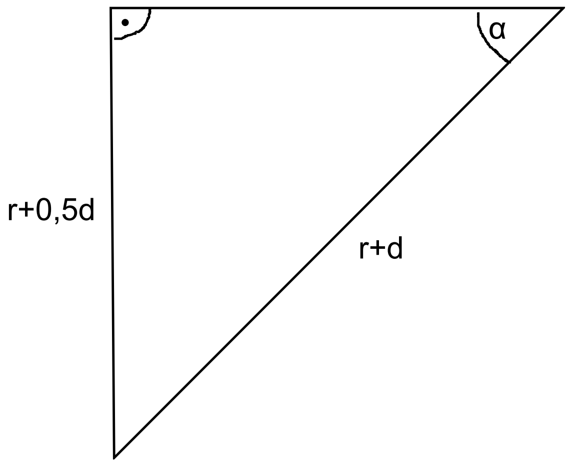

Abbildung 3: Berechnen von α

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{r + \frac{d}{2}}{r + d} \\ \Leftrightarrow (r + d)\sin(\alpha) &= r + \frac{d}{2} \\ \Leftrightarrow r &= d\frac{\frac{1}{2} - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - 1} \end{aligned} \tag{38}$$

Der Grenzwinkel der Totalreflexion ist jener, bei der der Winkel des gebrochenen Strahls genau $\frac{\pi}{2}$ ist. Es folgt also nach Snellius:

$$\sin(\alpha) = \frac{1}{n_2} \tag{39}$$

(nachdem $n_1 = 1$ gilt). Eingesetzt in die vorige Formel ergibt das:

$$r = d\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{n_2}}{\frac{1}{n_2} - 1} = d\frac{n_2 - 2}{2 - 2n_2} \tag{40}$$

b)

$$r_{\text{min}} = 0{,}25\text{mm} \tag{41}$$