Grundlagen der Physik 2
Lösung zu Übungsblatt 1

Daniel Weiss

8. März 2010

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

Der gedämpfte harmonische Oszillator lässt sich wie folgt beschreiben:

$$\underbrace{m\ddot{x}}_{\text{Im Gesamten wirkende Kraft}} + \underbrace{b\dot{x}}_{\text{Dämpfungsglied}} + \underbrace{Dx}_{\text{Rückstellkraft}} = 0 \tag{1}$$

Dabei ist $m\ddot{x}$ die Gesamtkraft, die im System wirkt. Dazu werden das Dämpfungsglied - eine Kraft, die von der Geschwindigkeit abhängt (meist Reibung) und negativ wirkt - und die Rückstellkraft z.B. von einer Feder; ist immer ortsabhängig - addiert. Im Gesamten muss es 0 ergeben, da die beiden letzten Terme jeweils negativ sind und die einzig wirkenden Kräfte sind: also müssen sie gleich der Gesamtkraft sein.

Diese homogene Differentialgleichung kann mit dem Ansatz $x(t) := c \cdot e^{\lambda t}$ gelöst werden. Das führt zu:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{2}$$

Dabei wurde substituiert:

$$2\gamma := \frac{b}{m} \tag{3}$$

$$\omega_0^2 := \frac{D}{m} \tag{4}$$

Die Allgemeine Lösung ist nun (Menge der Linearkombinationen der beiden Lösungen, die den Kern der Differentialgleichung bilden):

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(c_1 e^{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t}\right) \tag{5}$$

a) Bei starker Dämpfung besteht die Schwingung nur aus einer einzigen Auslenkung, die im Unendlichen wieder 0 erreicht (Kriechfall). In diesem Fall ist der Radikant in Gleichung 5 positiv. Die Wurzel ist also reell und es gilt: $\gamma > \omega_0$. Folgende Substitution führt nun zu einer einfacheren Gleichung:

$$\omega := \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{6}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\gamma t}\left(c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}\right) \tag{7}$$

Mit den Anfangsbedingungen lässt sich diese Gleichung mit den Hyperbelfunktionen ausdrücken:

$$x(0) = x_0 \Rightarrow c_1 = x_0 - c_2 \tag{8}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow -\gamma c_1 - \gamma c_2 + c_1\omega - c_2\omega = 0 \tag{9}$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{x_0}{2} + \frac{x_0\gamma}{2\omega} \tag{10}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{x_0}{2} - \frac{x_0\gamma}{2\omega} \tag{11}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\gamma t}\left(x_0 \cosh \omega t + \frac{x_0\gamma}{\omega}\sinh \omega t\right) \tag{12}$$

b) Dieser Fall sieht im xt-Schaubild ähnlich aus wie der der starken Dämpfung, allerdings geht die Amplitude nach der anfänglichen Auslenkung viel stärker gegen 0. In diesem Fall ist der Radikant 0, also $\gamma = \omega_0$. Dadurch ist die nunmehr einzige Lösung für λ entartet. Der Kern muss aber zweidimensional sein. Analog zur Vorgehensweise in der Linearen Algebra wird nun noch ein "Hauptvektor" benötigt. Die Lösung ist deshalb:

$$x(t) = e^{-\gamma t}(c_1 + c_2 t) \tag{13}$$

Werden die Konstanten mit den Anfangsbedingungen analog zu oben bestimmt folgt die Gleichung:

$$x(t) = e^{-\gamma t}(x_0 + \gamma x_0 t) \tag{14}$$

c) Der Radikant ist hier negativ, also $\gamma < \omega_0$. Substituiere:

$$\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{15}$$

Es folgt:

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}\right) \tag{16}$$

Mit den Anfangsbedingungen folgt analog zu oben:

$$c_1 = \frac{x_0}{2} + \frac{x_0\gamma}{2i\omega} \tag{17}$$

$$c_2 = \frac{x_0}{2} - \frac{x_0\gamma}{2i\omega} \tag{18}$$

$$\tag{19}$$

und somit

$$e^{-\gamma t}\left(x_0\cos(\omega t) + \frac{x_0\gamma}{\omega}\sin(\omega t)\right) \tag{20}$$

Aufgabe 2

Es handelt sich um einen ungedämpften harmonischen Oszillator. Der Ansatz ist:

$$m\ddot{x} + Dx = 0 \tag{21}$$

mit der Federkonstanten D. Das Lösen der Differentialgleichung führt zusammen mit den Anfangsbedingungen:

$$x(0) = x_0 \Rightarrow c_1 + c_2 = x_0 \tag{22}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 \tag{23}$$

zu

$$x(t) = c_1 e^{\sqrt{\frac{D}{m}}t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{D}{m}}t} = x_0\cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}}t\right) = x_0\cos(\omega t) \tag{24}$$

a) Es ist an der Stelle der maximalen Auslenkung (x_0):

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{Dg}{mg}} = \sqrt{\frac{F_{\max}g}{mgx_0}} = \sqrt{\frac{g}{x_0}} \tag{25}$$

$$\Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = 2{,}23\text{Hz} \tag{26}$$

b) 5cm unterhalb der Ausgangslage ist der Punkt mit der maximalen Geschwindigkeit in beide Richtungen, es gilt also $x(t_1) = 0$.

$$x(t_1) = 0 \Rightarrow t_1 = \pm\frac{\pi}{2\omega} \tag{27}$$

$$\dot{x}(t_1) = -\omega x_0 \sin\left(\frac{\omega}{\omega}\cdot\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right) = \tag{28}$$

$$= \pm 70\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

c) $1\text{dag} = 10^{-2}\text{kg}$
m_1 sei die ursprüngliche Masse, m_2 die neu hinzugefügte und $f_1 = 2f_2$ die jeweils zugehörigen Frequenzen.

$$f_2 = \frac{f_1}{2} \Rightarrow \omega_2 = \frac{1}{2}\omega_1 \tag{29}$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{D}{m_1}} = \sqrt{\frac{D}{m_1 + m_2}} \tag{30}$$

$$\Leftrightarrow m_1 + m_2 = 4m_1 \tag{31}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}m_2 = m_1 = 10^{-1}\text{kg} \tag{32}$$

d) Die Federkonstante ist:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m_1}} \Rightarrow D = \omega_1^2 \cdot m_1 = 19{,}62\frac{\text{N}}{\text{m}} \tag{33}$$

ω_1 folgt aus Gleichung 26. Die neue Gleichgewichtslage ist bei:

$$\frac{(m_1 + m_2)g}{D} = 2 \cdot 10^{-1}\text{m} \tag{34}$$

Also 15cm unterhalb der alten Gleichgewichtslage.

Aufgabe 3

a) Das logarithmische Dekrement ist der natürliche Logarithmus aus dem Quotienten zweier aufeinanderfolgender Auslenkungen.

$$\delta = \ln\left(\frac{A_0}{A_1}\right) = \ln(2) = 0{,}693 \tag{35}$$

Der Dämpfungskoeffizient ist:

$$\gamma = \frac{\delta}{T} = 1{,}386 \tag{36}$$

b) Kreisfrequenz der Schwingung (siehe schwache Dämpfung im Teil 1a):

$$\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{37}$$

Auflösen nach f_0:

$$\omega = 2\pi f \tag{38}$$

$$\Rightarrow f = \frac{\sqrt{4\pi f_0^2 - \gamma^2}}{2\pi} =$$

$$= \sqrt{f_0^2 - \frac{\gamma^2}{4\pi^2}}$$

$$\Rightarrow f^2 = f_0^2 - \frac{\gamma^2}{4\pi^2}$$

$$\Rightarrow f_0 = \sqrt{f^2 + \frac{\gamma^2}{4\pi^2}}$$

$$\Rightarrow T_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{T^2} + \frac{\gamma^2}{4\pi^2}}} = 0{,}497\text{s} \tag{39}$$

Aufgabe 4

a) Siehe Gleichung 26.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m_1}} \Rightarrow m_1 = \frac{D}{\omega_1^2} \tag{40}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{D}{m_2}} \Rightarrow m_2 = \frac{D}{\omega_2^2} \tag{41}$$

$$\Rightarrow \Delta m = \frac{D}{\omega_2^2} - \frac{D}{\omega_1^2} \tag{42}$$

b) Hier habe ich ein anderes Ergebnis als in der Angabe. Wer den Fehler sieht, bitte melden.

$$D = 10^6\text{N} \tag{43}$$

$$\omega_0 = 2\pi \cdot 10^7\text{Hz} \tag{44}$$

$$\omega_1 = 2\pi \cdot 9{,}5 \cdot 10^6\text{Hz} \tag{45}$$

$$\Rightarrow \Delta m = 2{,}74 \cdot 10^{-11}\text{kg} = 0{,}0274\mu\text{g} \tag{46}$$

Aufgabe 6

Die Faktoren berechnen sich so:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt \tag{47}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt \tag{48}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt \tag{49}$$

Da f(t) eine gerade Funktion ist ($f(t) = f(-t)$), ist $b_n = 0$. (Siehe auch hier.)

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \|\sin(t)\|_2 dt = \frac{2}{\pi}(\cos(\pi = +\cos(0)) = \frac{4}{\pi} \tag{50}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \|\sin(t)\|_2 \cos(2nt)dt \overset{\text{part. Int.}}{=} \\ &= \Big[-\cos(t)\cos(2nt)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi 2n\cos(t)\sin(2nt) = \\ &= 2 - \Big[2n\sin(t)\sin(2nt)\Big]_0^\pi + \int_0^\pi 4n^2\sin(t)\cos(2nt) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_n = -\frac{2}{4n^2-1} \tag{51}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2nt)}{4n^2-1} \tag{52}$$