Grundlagen der Physik 2
Lösung zu Übungsblatt 3

Daniel Weiss

16. März 2010

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

a) Das Potential ist ein Skalarfeld. Für Punkte auf der x-Achse mit $\Phi(x) = 0$ muss gelten:

$$\Phi_1(x) + \Phi_2(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{\|x\|_2} + \frac{Q_2}{\|x-b\|_2}\right) = 0 \tag{1}$$

Wenn wir annehmen, dass $|Q_1| > |Q_2|$ und $Q_1 > 0, Q_2 < 0$ gibt es folgende Fälle. Andere Annahmen führen zu exakt demselben Ergebnis (wenn man das Koordinatensystem so verschiebt, dass die betragsmäßig größere Ladung im Ursprung ist). Einzige Bedingung: $\operatorname{sgn}(Q_1) = -\operatorname{sgn}(Q_2)$ - sonst gibt es nur im unendlichen jeweils eine Nullstelle.

1) $x - b > 0$:

$$\Rightarrow Q_1 x - Q_1 b + Q_2 |x| = 0 \tag{2}$$

i) $x > 0$:

$$\Rightarrow Q_1 x - Q_1 b + Q_2 x = 0 \tag{3}$$

$$x = \frac{Q_1 b}{Q_1 + Q_2} = \frac{|Q_1 b|}{|Q_1| - |Q_2|} \tag{4}$$

ii) $x < 0$:

$$\Rightarrow Q_1 x - Q_1 b - Q_2 x = 0 \tag{5}$$

$$x = \frac{Q_1 b}{Q_1 - Q_2} = \frac{|Q_1 b|}{|Q_1| + |Q_2|} > 0 \quad ↯ \tag{6}$$

Kann nicht sein!!

2) $x - b < 0$:

$$\Rightarrow -Q_1 x + Q_1 b + Q_2 |x| = 0 \tag{7}$$

i) $x > 0$:

$$\Rightarrow -Q_1 x + Q_1 b + Q_2 x = 0 \tag{8}$$

$$x = \frac{-Q_1 b}{-Q_1 + Q_2} = \frac{|Q_1 b|}{|Q_1| + |Q_2|} \tag{9}$$

ii) $x < 0$:

$$\Rightarrow -Q_1 x + Q_1 b - Q_2 x = 0 \tag{10}$$

$$x = \frac{-Q_1 b}{-Q_1 - Q_2} = \frac{|Q_1 b|}{|Q_1| - |Q_2|} > 0 \quad ↯ \tag{11}$$

Kann nicht sein!!

Daraus folgt:

$$x_1 = \frac{|Q_1 b|}{|Q_1| + |Q_2|} \tag{12}$$

$$x_2 = \frac{|Q_1 b|}{|Q_1| - |Q_2|} \tag{13}$$

b) Hier der Potentialverlauf für beide Spezialfälle.

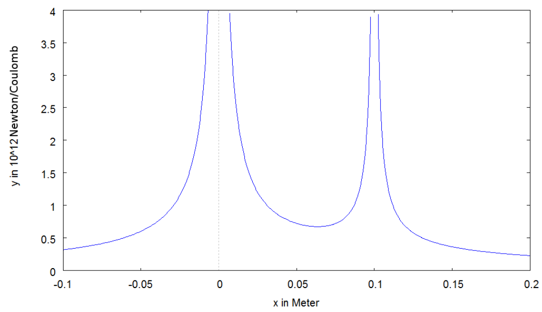

Abbildung 1: Potentialverlauf bei $Q_1 = 3\text{C}$ und $Q_2 = 1\text{C}$

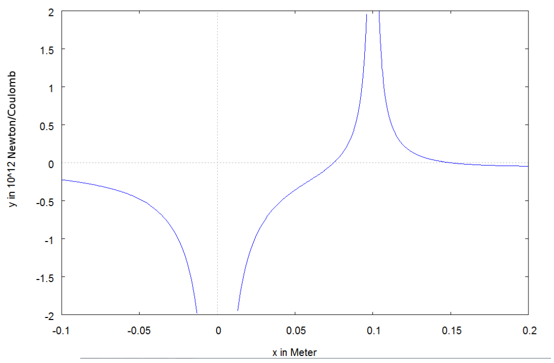

Abbildung 2: Potentialverlauf bei $Q_1 = -3\text{C}$ und $Q_2 = 1\text{C}$

Aufgabe 2

a) Siehe auch Aufgabe 1a)

$$x_1 = \frac{|Q_1 b|}{|Q_1| + |Q_2|} \tag{14}$$

$$x_2 = \frac{|Q_1 b|}{|Q_1| - |Q_2|} \tag{15}$$

b) Schreibe einen Punkt P auf der Kugel in Kugelkoordinaten (Versatz um M auf der x-Achse, da Kugelmittelpunkt nicht im Ursprung):

$$x := R\sin(\theta)\cos(\phi) \tag{16}$$

$$y := R\sin(\theta)\sin(\phi) \tag{17}$$

$$z := R\cos(\theta) \tag{18}$$

$$\Rightarrow \vec{p} = \begin{pmatrix} M \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + R\begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{19}$$

Der Abstand zwischen dem Ursprung (Q_1) und P ist die Norm von $\vec{p}$:

$$\begin{aligned}
\|p\|_2 &= \sqrt{M^2 + 2MR\sin(\theta)\cos(\phi) + R^2\sin^2(\theta)\cos^2(\phi) + R^2\sin^2(\theta)\sin^2(\phi) + R^2\cos^2(\theta)} = \\
&= \sqrt{M^2 + 2MR\sin(\theta)\cos(\phi) + R^2\sin^2(\theta) + R^2\cos^2(\theta)} = \\
&= \sqrt{M^2 + 2MR\sin(\theta)\cos(\phi) + R^2} =: A \qquad (20)
\end{aligned}$$

Der Abstand zwischen dem Punkt der zweiten Ladung und dem Punkt P ist die Norm der Differenz der Ortsvektoren von P und von Q_2:

$$\|p - \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\|_2 = \sqrt{(M-b)^2 + 2(M-b)R\sin(\theta)\cos(\phi) + R^2} =: B \qquad (21)$$

Der Mittelpunkt des Kreises liegt auf der x-Achse:

$$\begin{aligned}
M &:= x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad (22) \\
\Rightarrow M &= \frac{1}{2}\left(\frac{|Q_1 b|}{|Q_1| + |Q_2|} + \frac{|Q_1 b|}{|Q_1| - |Q_2|}\right) = \\
&= \frac{|Q_1^2 b|}{Q_1^2 - Q_2^2} \qquad (23)
\end{aligned}$$

und der Radius entspricht dem halben Abstand von x_1 und x_2:

$$\begin{aligned}
R &:= \frac{x_2 - x_1}{2} = \qquad (24) \\
\Rightarrow R &= \frac{1}{2}\left(\frac{|Q_1 b|}{|Q_1| - |Q_2|} - \frac{|Q_1 b|}{|Q_1| + |Q_2|}\right) = \\
&= \frac{|Q_1 Q_2 b|}{Q_1^2 - Q_2^2} \qquad (25)
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich sofort die folgende wichtige Beziehung:

$$M - b = \frac{R^2}{M} \qquad (26)$$

mit deren Hilfe wir B (Gl. 21) umschreiben können:

$$B = \sqrt{\frac{R^4}{M^2} + 2\frac{R^3}{M}\sin(\theta)\cos(\phi) + R^2} \qquad (27)$$

Mit der Bedingung, dass das Potential 0 ist, folgt

$$\begin{aligned}
\Phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{A} + \frac{Q_2}{B}\right) = 0 \qquad (28) \\
\Leftrightarrow 0 &= Q_1 \cdot B + Q_2 \cdot A \qquad (29) \\
\Leftrightarrow \frac{|Q_1|}{|Q_2|} &= \frac{A}{B} \qquad (30)
\end{aligned}$$

Nun setzen wir die beiden Abstände A und B von oben ein und zeigen, dass beide Seiten gleich sind. Da A und B die Abstände für beliebige Punkte auf der Kugel sind, haben wir damit gezeigt, dass auf der gesamten Oberfläche der Kugel das Potential 0 ist.

$$\begin{aligned}
\frac{A}{B} &= \sqrt{\frac{M^2 + 2MR\sin(\theta)\cos(\phi) + R^2}{\frac{R^4}{M^2} + 2\frac{R^3}{M}\sin(\theta)\cos(\phi) + R^2}} = \\
&= \frac{M}{R}\sqrt{\frac{1 + 2\frac{R}{M}\sin(\theta)\cos(\phi) + \frac{R^2}{M^2}}{\frac{R^2}{M^2} + 2\frac{R}{M}\sin(\theta)\cos(\phi) + 1}} = \\
&= \frac{M}{R} = \frac{\frac{|Q_1^2 b|}{Q_1^2 - Q_2^2}}{\frac{|Q_1 Q_2 b|}{Q_1^2 - Q_2^2}} = \frac{|Q_1|}{|Q_2|} \quad \square
\end{aligned} \tag{31}$$

Aufgabe 4

a) Es ist

$$Q = CU = CEd \tag{32}$$

und

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \tag{33}$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{Ed} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \tag{34}$$

$$\Rightarrow A = \frac{Cd}{\epsilon_0} = 1{,}129 \cdot 10^{-3}\mathrm{m}^2 \tag{35}$$

b)

$$U = Ed \Rightarrow E = \frac{U}{d} = 10^6 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \tag{36}$$

c) Die Gesamtkapazität ist die Summe der Einzelkapazitäten und die Ladung bleibt aufgrund des Fehlens von Quellen oder Verbrauchern erhalten.

$$Q_{\text{ges}} = C_1 U_1 = C_1 U_2 + C_2 U_2 \tag{37}$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{C_1 U_1 - C_1 U_2}{U_2} = 2{,}33 \cdot 10^{-10}\mathrm{F} \tag{38}$$

Aus Gleichung 36 folgt:

$$d_2 = \epsilon_0 \frac{A_2}{C_2} = 1{,}9 \cdot 10^{-4} m \tag{39}$$

Aufgabe 5

Ableiten ergibt für die beiden Fälle:

$$\Delta f = 2 + 2 = 4 \neq 0 \tag{40}$$

$$\Delta g = 2 - 2 = 0 \tag{41}$$

Also genügt g der Laplacegleichung, f hingegen nicht. Der Gradient von g ist:

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} \tag{42}$$

In den 4 Punkten ergeben sich folgende Vektoren:

$$(0,1) : \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{43}$$

$$(1,0) : \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{44}$$

$$(0,-1) : \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{45}$$

$$(-1,0) : \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{46}$$

Aufgabe 6

a) Aus dem Satz von Gauß folgt

$$\int_{\partial V} \vec{E} d\vec{A} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{47}$$

Damit lässt sich die Flächenladungsdichte auf der Erdoberfläche berechnen:

$$\sigma = \epsilon_0 E = -1{,}15 \cdot 10^{-9} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \tag{48}$$

Das Minuszeichen kommt daher, dass E auf den Erdmittelpunkt zeigt und somit negativ ist. Die Raumladungsdichte der Atmosphäre ist

$$\begin{aligned} \rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V} &= \frac{\epsilon_0 (E_2 A_2 - E_1 A_1)}{V_2 - V_1} = \\ &= \frac{3\epsilon_0 (E_2 (R_E + h)^2 - E_1 R_E^2)}{(R_E + h)^3 - R_E^3} = 1{,}11 \cdot 10^{-13} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3} \end{aligned} \tag{49}$$

b) Je weiter man sich von der Erdoberfläche entfernt, desto geringer muss die Flächenladungsdichte der Kugeloberfläche werden, da die Oberfläche größer wird und die eingeschlossene Ladung konstant ist (solange das Feld konstant ist). Diese Verkleinerung der Flächenladungsdichte kann mithilfe der Raumladungsdichte ausgedrückt werden.

$$
\begin{aligned}
|U(h)| &= |\int_0^h \frac{\sigma}{\epsilon_0} + \frac{\rho h}{\epsilon_0} dh| = \\
&= |\frac{2\sigma h + \rho h^2}{2\epsilon_0}| = 6{,}72 \cdot 10^5 \mathrm{V}
\end{aligned}
\tag{50}
$$