Grundlagen der Physik 2
Lösung zu Übungsblatt 7

Daniel Weiss

3. Mai 2010

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

a) Es gilt für die Potentialdifferenz der beiden Platten, wenn Randeffekte vernachlässigt werden, aufgrund des homogenen Feldes im Kondensator:

$$U = \Delta\Phi = \int_0^d \vec{E}\mathrm{d}\vec{\mathrm{l}} = Ed \Rightarrow E = \frac{U}{d} \tag{1}$$

b Die maximale Energie, die die Ladung dem Kondensator “enzieht” und in kinetische Energie umwandelt entspricht der potentiellen Energie, die sie am Ort der sie abstoßenden Platte hat.

$$E_{\mathrm{pot}} = \int_0^d F\,\mathrm{dl} = \int_0^d qE\,\mathrm{dl} = qEd = qU \tag{2}$$

Alternativ kann man auch die kinetische Energie direkt berechnen.

$$v_{\mathrm{x}} = a_{\mathrm{x}} t \tag{3}$$

$$a_{\mathrm{x}} = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} \tag{4}$$

$$\Rightarrow v_{\mathrm{x}} = \frac{qE}{m} t \tag{5}$$

$$x = \frac{1}{2}\frac{qE}{m} t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2dm}{qE}} \tag{6}$$

Hier wurde der Zeitpunkt eingesetzt, zu dem die Ladung auf der sie anziehenden Platte auftrifft. Also $x = d$.

$$\Rightarrow v_{\mathrm{x}} = \frac{qE}{m}\sqrt{\frac{2dm}{qE}} = \sqrt{\frac{2qEd}{m}} \tag{7}$$

$$\Rightarrow E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} m v_{\mathrm{x}}^2 = \frac{1}{2} m \frac{2qEd}{m} = qEd = qU \tag{8}$$

Es kommt natürlich dasselbe Ergebnis heraus. Die Geschwindigkeit v_0 ist für diese Rechnung unerheblich und hat nur Einfluss darauf, wie lange die Ladung in dem Feld des Kondensators bleibt. Für die Berechnung, des maximalen “Energieverlustes” des Kondensators kann sie 0 gesetzt werden.

Aufgabe 2

Das Dipolmoment ist die Summe aller Ortsvektoren der einzelnen Ladungen multipliziert mit der Ladung an diesem Ort. Falls das Monopolmoment - also die Summe aller diskreten Ladungen - 0 ist, ist das Dipolmoment unabhängig von der Wahl des Ursprungs.

a) Das Monopolmoment ist hier 0, also ist die Wahl des Ursprungs egal. Wähle den oberen Punkt des Dreiecks als Ursprung.

$$\vec{p} = q\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}d \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}d \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} \frac{1}{2}d \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}d \end{pmatrix} = q\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}d \end{pmatrix} \tag{9}$$

b) Das Monopolmoment ist $2q$, daher ist das Dipolmoment für jeden Ursprung anders. Zum Beispiel ist $\vec{p}$ für den Ursprung genau in der Mitte der Ladungen $\vec{0}$. Wähle die Ladung links unten als Ursprung.

$$\vec{p} = -q\begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix} + 2q\begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} + 2q\begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} = q\begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix} \tag{10}$$

c) Das Monopolmoment ist 0. Wähle als Ursprung die Ladung links unten.

$$\vec{p} = 2q \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} - 2q \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} 3d \\ -d \end{pmatrix} \tag{11}$$

Aufgabe 3

Diese Aufgabe ist ähnlich der Aufgabe 4. Die Herleitung der Gleichung, die in Teil a) verwendet wird ist dort zu finden.

a) Der Draht hat eine Länge von

$$L = 2\pi r \cdot nl = 28{,}27\mathrm{m} \tag{12}$$

und einen spezifischen Widerstand von $\rho = 0{,}01\frac{\omega}{\mathrm{m}}$. Daraus folgt der Gesamtwiderstand und somit der fließende Strom:

$$R = \rho \cdot L = 0{,}283\omega \Rightarrow I = \frac{U}{R} = 84{,}88\mathrm{A} \tag{13}$$

Herleitung der folgenden Gleichung siehe Aufgabe 4. Feld in der Mitte:

$$B_{\mathrm{z}} = \frac{\mu_0}{2}\frac{n}{l}I\frac{l}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + R^2}} = 52{,}3\mathrm{mT} \tag{14}$$

Feld am Rand:

$$B_{\mathrm{z}} = \frac{\mu_0}{2}\frac{n}{l}I\frac{l}{\sqrt{l^2 + R^2}} = 26{,}5\mathrm{mT} \tag{15}$$

b) Leistung über zugeführte Spannung / fließender Strom:

$$P = UI = 2037\mathrm{W} \tag{16}$$

Aufgabe 4

a) Die magnetische Induktion auf der Z-Ebene kann aus dem Biot-Savartschen Gesetz hergeleitet werden. Im Abschnitt dz' sind

$$\frac{n}{l}\,\mathrm{dz}' \tag{17}$$

Windungen der Spule, wenn n die Gesamtzahl der Windungen und l die Länge der Spule sind. Durch jede dieser Leiterschleifen fließt derselbe Strom I. Im infinitesimalen kann man nun diese Leiterschleifen im Abschnitt dz' durch eine einzige Leiterschleife ersetzen, durch die dann der Strom

$$dI = \frac{n}{l}I\,\mathrm{dz}' \tag{18}$$

fließt.
Mit dem Gesetz von Biot-Savart im Spezialfall für Felder auf der Achse durch die Mitte einer Leiterschleife folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{dB_z} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2}{((z-z')^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{dI} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2\frac{n}{l}I}{((z-z')^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{dz'} \\
\Rightarrow B_\mathrm{z} &= \frac{\mu_0}{2}R^2\frac{n}{l}I\int_0^l \frac{1}{((z-z')^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{dI} = \\
&= \frac{\mu_0}{2}\frac{n}{l}I\left[\frac{z-z_1}{\sqrt{(z-z_1)^2+R^2}} - \frac{z-z_2}{\sqrt{(z-z_2)^2+R^2}}\right] \qquad (19)
\end{aligned}$$

In diese Gleichung setzen wir nun $z = 0$, $z_1 = -\frac{l}{2}$, $z_2 = \frac{l}{2}$. n,l,I sind direkt angegeben und R kann aus der umschlossenen Fläche berechnet werden. Das ergibt dann:

$$B_\mathrm{z} = 1{,}22\mathrm{mT} \qquad (20)$$

b) Um die Rechnung einfach zu halten nähern wir das Feld in der Spule als konstant bezüglich Änderungen in x- bzw. y-Richtung, also:

$$\frac{\partial B}{\partial x} := 0 =: \frac{\partial B}{\partial y} \qquad (21)$$

Nun gilt

$$\Phi = \int_A \vec{B}\mathrm{d}\vec{\mathrm{A}} \overset{(21)}{\approx} BA = 610\mathrm{nWb} \qquad (22)$$

Aufgabe 5

a) Wir betrachten das Feld der Erde (erzeugt von einem Kreisstrom um den Äquator (eine Leiterschleife)) und setzen in Gleichung 19 folgende Werte:

$$\begin{aligned}
z &= R \\
z_1 &= -R \\
z_2 &= R \\
n &= 1 \\
l &= 2R
\end{aligned}$$

Das ergibt:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \qquad (23)$$

Nun erweitern wir diesen Bruch um die magnetische Induktion ersetzen zu können.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}\cdot\frac{\pi R^2}{\pi R^2} = \frac{\mu_0 p_\mathrm{m}}{2\pi R^3} \qquad (24)$$

Hierbei wurde die Definition des magnetischen Dipolmomentes $p_\mathrm{m} = I \cdot A$ verwendet. Auflösen nach p_m liefert die Lösung.

$$p_\mathrm{m} = \frac{2\pi B R^3}{\mu_0} = 8{,}2 \cdot 10^{22}\mathrm{Am}^2 \tag{25}$$

Als Erdradius wurde der mittlere Erdradius (Quelle: Wikipedia) eingesetzt: $R = 6371\mathrm{km}$.

b) Ausgehend von Gleichung 23 lösen wir nach I auf:

$$I = \frac{2BR}{\mu_0} = 6 \cdot 10^8\mathrm{A} \tag{26}$$

Hier wurde wieder der mittlere Erdradius eingesetzt: $R = 6371\mathrm{km}$. Alternativ kann auch gerechnet werden:

$$I = \frac{p_\mathrm{m}}{A} \tag{27}$$

Aufgabe 6

a) Auf den Bügel wirkt die Lorentzkraft (nur auf den Querschenkel; die Komponenten der beiden senkrechten Schenkel heben sich gegenseitig auf).

$$dF_\mathrm{L} = \mathrm{dq}\left(\frac{\vec{\mathrm{ds}}}{\mathrm{dt}} \times \vec{B} + \underbrace{\vec{E}}_{=0}\right) = \frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{dt}}\left(\vec{\mathrm{ds}} \times \vec{B}\right) \tag{28}$$

Davon interessiert uns nur die z-Komponente (alle anderen Komponenten sind sowieso 0). Im Folgenden bezeichnet demnach F die z-Komponente der wirkenden Lorentzkraft.

$$\Rightarrow F = IsB = \mu_0 IsH \tag{29}$$

$$\Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{\mu_0 IsH}{m} \tag{30}$$

Bis zum Verlassen des Quecksilberbades wirken die Erdbeschleunigung und die "Lorentzbeschleunigung" auf den Bügel.

$$h_1 = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 = \frac{1}{2}t^2\left(\frac{F}{m} - g\right) \tag{31}$$

Dabei ist h_1 die Höhe der senkrechten Schenkel des Bügels. Mit

$$t = \frac{v}{a} \tag{32}$$

wird das zu

$$h_1 = \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{\frac{F}{m} - g} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2h_1\left(\frac{Is\mu_0 H}{m} - g\right)} \tag{33}$$

Es gilt weiterhin die Energieerhaltung

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 \tag{34}$$

$$E_1 = mgh \tag{35}$$

$$\begin{aligned} E_0 = E_1 \Rightarrow h &= \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{g} + h_1 = \\ &= h_1\left(\frac{Is\mu_0 H}{mg} - 1 + 1\right) = \frac{Is\mu_0 H h_1}{mg} = 3{,}7\text{m} \end{aligned} \tag{36}$$

b) Allgemein kann die Ladungsmenge aus der Stromstärke mal Zeit bestimmt werden.

$$I = \frac{Q}{t} \Leftrightarrow Q = It \tag{37}$$

Dabei bezieht sich t auf die Zeit, während der der Drahtbügel noch im Quecksilberbad ist und beschleunigt wird. Wir möchten aber die geflossene Ladung durch die Flughöhe ausdrücken. Dazu verwenden wir Gleichung 36:

$$h = \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{g} + h_1 = \frac{1}{2}\frac{a^2 t_1^2}{g} + h_1 \tag{38}$$

Umformen nach t_1 ergibt

$$t_1 = \sqrt{\frac{2g(h-h_1)}{a^2}} = \sqrt{\frac{2g(h-h_1)}{\left(\frac{\mu_0 HIs}{m} - g\right)^2}} \tag{39}$$

Daraus kann nun die geflossene Ladung in Abhängigkeit von der Flughöhe h ausgedrückt werden:

$$Q = \sqrt{\frac{2g(h-h_1)}{\left(\frac{\mu_0 HIs}{m} - g\right)^2}}\, I = 1{,}4\text{C} \tag{40}$$