Grundlagen der Physik IIa - Übungen

Ass.Prof. Dr. R.A. Wilhelm
wilhelm@iap.tuwien.ac.at
TU Wien - Grundlagen der Physik IIa (130.003) 2023S

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE PHYSIK
Institute of Applied Physics

09.03.2023

Aufgabe 1.1 - 2 Pkt.

Acht gleich große Punktladungen (Q) sind an den Eckpunkten eines Würfels mit der Seitenlänge a angeordnet.
(a) Wie groß ist die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ an der Position jeder dieser Punktladungen, welche jeweils durch die übrigen sieben Punktladungen hervorgerufen wird?
(b) Berechnen Sie die potentielle Energie dieser Anordnung (vernachlässigen Sie dabei die Eigenenergie der Punktladungen).

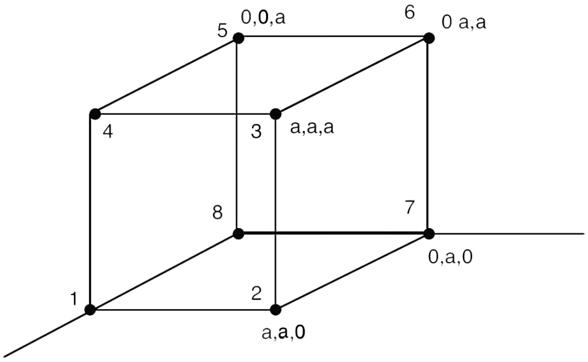

Figure 1: Skizze des Problems.

Lösung: (a) $\frac{3.29Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{e}_{Punkt}$, (b) $5.698\frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 a}$

Aufgabe 1.2 - 2 Pkt.

Gegeben sei zunächst eine Ladungsanordnung, die aus den Ladungen $q_1 = -2Q$, $q_2 = -2Q$ und $q_3 = Q$ besteht (siehe Skizze). Verwende die Normierung $\Phi(\infty) = 0$ für das Potential.
(a) Berechnen Sie die potentielle Energie W_{pot} dieser Ladungsanordnung.
(b) Berechnen Sie das Potential $\Phi(x)$ auf der x-Achse für $x \geq 0$.
(c) Berechnen Sie die elektrische Feldstärke $\vec{E}(x)$ auf der x-Achse für $x \geq 0$.

Eine Ladung $q_4 = Q$ wird nun aus dem Unendlichen entlang der x-Achse auf eine Position $x = 0$ an die aus den 3 Ladungen bestehende Anordnung herangebracht.

(d) Welche Arbeit muss dafür aufgebracht werden bzw. wie viel Energie wird dabei frei?
(e) Welche Kraft $\vec{F}$ wirkt dann auf die Ladung q_4 an der Position $x = 0$?

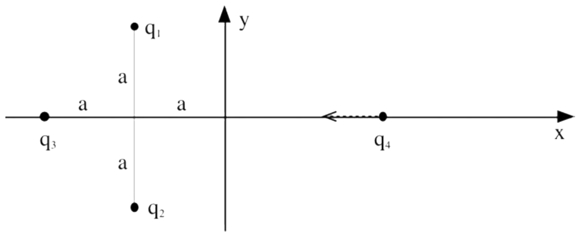

Figure 2: Skizze des Problems.

Lösung: (a) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q^2}{a}(2-2\sqrt{2})$, (b) $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{2a+x}-\frac{4}{\sqrt{a^2+(a+x)^2}}\right)$, (c) $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(2a+x)^2}-\frac{4(a+x)}{\left(\sqrt{a^2+(a+x)^2}\right)^3}\right)$, (d) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a}\left(\frac{1}{2}-2\sqrt{2}\right)$, (e) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a^2}\left(\frac{1}{4}-\sqrt{2}\right)$

Aufgabe 1.3 - 2 Pkt.

Bestimmen Sie den Betrag des elektrischen Feldes am Ort P im Abstand x eines sehr langen (d.h. unendlichen) geladenen Stabes (zum Beispiel ein Draht) mit gleichförmig verteilter Ladung. Setzen Sie voraus, dass x viel kleiner ist als die Länge des Drahtes. λ sei die Ladung pro Längeneinheit.

Hinweis: Da der Beitrag zum elektrischen Feld im Abstand r von jeder Ladung dQ gleich $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r^2}\vec{e}_r$ ist, soll im vorliegenden Fall das gesamte elektrische Feld durch Superposition, d.h. durch $\vec{E} = \int_Q d\vec{E}$ berechnet werden.

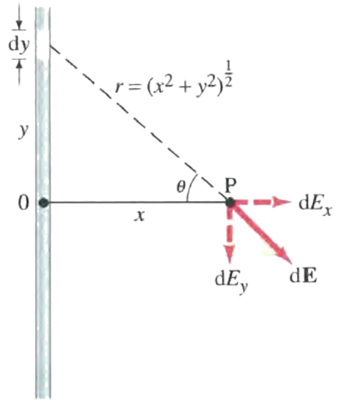

Figure 3: Skizze des Problems.

Lösung: $\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{x}$

Aufgabe 1.4 - 1 Pkt.

Ein ringförmiger nichtleitender Körper mit dem Radius a trägt die Gesamtladung Q, die gleichförmig verteilt ist.
Bestimmen Sie das elektrische Feld an einem Punkt P auf seiner Symmetrieachse im Abstand x vom Zentrum (siehe Abbildung). Die Linienladung (Ladung pro Längeneinheit) sei dabei λ.

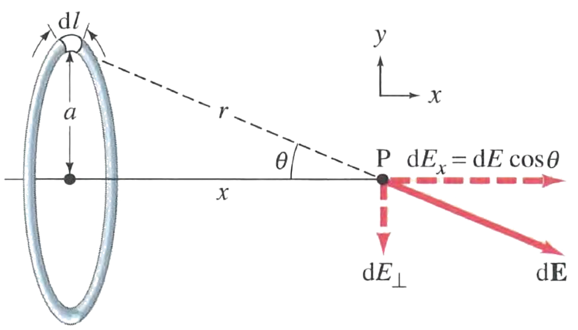

Figure 4: Skizze des Problems.

Lösung: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$

Aufgabe 1.5 - 3 Pkt.

Eine unendlich ausgedehnte Platte habe ein Loch mit Radius R und trägt eine gleichförmig verteilte Ladung. Die Ladung pro Fläche sei σ.
(a) Berechnen Sie das elektrische Feld am Ort P auf der Achse des Lochs mit dem Abstand x vom Mittelpunkt des Lochs.

Hinweis: Da der Beitrag zum elektrischen Feld im Abstand r_1 von jeder Ladung dQ gleich $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r_1^2}\vec{e}_{r_1}$ ist, kann das gesamte elektrische Feld durch Superposition, d.h. durch $\vec{E} = \int_Q d\vec{E}$ berechnet werden.

(b) Zeigen Sie, dass für $R \to 0$ der Ausdruck für das E-Feld in jenes der unendlich ausgedehnten Platte übergeht, wie es auch aus dem Gauß'schen Gesetz

$$\oiint_{\text{Oberfl.}} \vec{E}d\vec{A} = \iiint_V \text{div}\vec{E}dV =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum\left(\begin{array}{c}\text{eingeschlossene}\\ \text{Ladungen}\end{array}\right)$$

folgt.

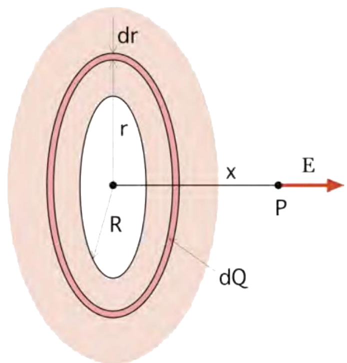

Figure 5: Skizze des Problems.

Lösung: (a) $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$, (b) $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

Aufgabe 1.6 - 3 Pkt.

Ein kugelförmiges Volumen (Radius R) enthält eine Raumladung konstanter Dichte $+\rho$.

(a) Wie groß ist die potentielle Energie W_{ges} dieser Ladungsverteilung, d.h. die Gesamtarbeit, die man für ihren Aufbau benötigt?
Gehen sie bei der Berechnung so vor, dass Sie die Kugel Schicht um Schicht aufbauen und dabei die Tatsache nutzen, dass das Feld außerhalb einer sphärischen Ladungsverteilung so aussieht, als wäre die gesamte Ladung im Mittelpunkt vereinigt.
Angenommen, die Kugel ist bereits bis zum Radius r aufgebaut: Wie groß ist dann die Gesamtladung Q? Nun fügen Sie eine infinitesimale Ladungsschicht (Dicke dr) hinzu und bestimmen die notwendige Arbeit dW_{ges}, um den entsprechenden Ladungsanteil aus dem Unendlichen bis zum Radius r heranzuführen. Schließlich integrieren Sie von $r = 0$ bis $r = R$. Drücken sie das Ergebnis in Abhängigkeit von der in der Kugel vorhandenen Gesamtladung Q aus.

(b) Berechnen Sie die elektrische Feldstärke E im gesamten Raumgebiet unter der Annahme dass die Ladungen unbeweglich seien und der Außenraum ladungsfrei ist.

(c) Berechnen Sie das elektrische Potential im gesamten Raumgebiet für $\Phi(r = \infty) = 0$

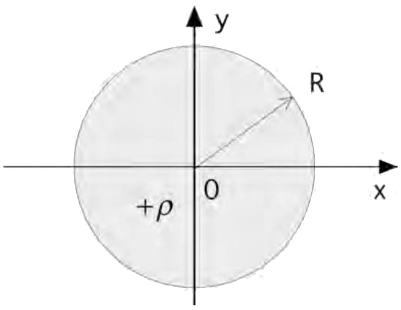

Figure 6: Skizze des Problems.

Lösung: (a) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{3}{5}\frac{Q^2}{R}$, (b) innen $\frac{\varrho r}{r\varepsilon_0}$ außen $\frac{R^3\varrho}{3\varepsilon_0 r^2}$, (c) innen $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right)$ außen $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$