Grundlagen der Physik IIb - Übungen

Ass.Prof. Dr. R.A. Wilhelm
wilhelm@iap.tuwien.ac.at
TU Wien - Grundlagen der Physik IIb (130.004) 2023S

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE PHYSIK
Institute of Applied Physics

04.05.2023

Aufgabe 7.1 - 3 Pkt.

Eine ebene Welle kann durch sein elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0\right)$ beschrieben werden, wobei $\vec{E}_0$ senkrecht zu $\vec{k}$ steht. Wie lautet dann in kartesischen Koordinaten die Gleichung einer ebenen Welle, die sich

(a) in z-Richtung ausbreitet (die Phasenflächen liegen parallel zur x,y-Ebene),
(b) längs der Geraden $z = x$ ausbreitet, wobei $y = 0$ ist,
(c) längs der Raumdiagonale im kartesischen Koordinatensystem ausbreitet?

Lösung: (a) $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz + \varphi_0)$, (b) $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - (k/\sqrt{2})(x+z) + \varphi_0\right)$, (c) $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t - (k/\sqrt{3})(x+y+z) + \varphi_0\right)$

Aufgabe 7.2 - 3 Pkt.

Gegeben ist das elektromagnetische Feld im freien Raum:

$$\begin{aligned} E_x &= 0 & B_x &= 0 \\ E_y &= E_0 \sin(\omega t - kx) & B_y &= 0 \\ E_z &= 0 & B_z &= (E_0/c)\sin(\omega t - kx) \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass dieses Feld den Maxwell-Gleichungen im ladungsfreien Raum entspricht, wenn eine bestimmte Beziehung zwischen ω und k gilt.
(b) Es seien $\omega = 10^{10}\,\mathrm{s}^{-1}$ und $E_0 = 1.5\,\mathrm{kV/m}$. Wie groß ist dann die Wellenlänge?
(c) Berechnen Sie dann die mittlere Energiedichte (in einem Volumen groß gegenüber der Wellenlänge), den Poynting-Vektor und die Energiestromdichte.
Lösung: (b) $0.188\,\mathrm{m}$, (c) $10^{-6}\,\mathrm{J/m^3}$, $\vec{S} = \varepsilon_0 c^2 \frac{E_0^2}{c} \sin^2(\omega t - kx) \cdot \vec{e}_x$

Aufgabe 7.3 - 3 Pkt.

Das elektrische Feld einer elektromagnetischen Welle sei gegeben durch $\vec{E}(x,t) = E_0 \cdot \sin(kx - \omega t) \cdot \vec{e}_y + E_0 \cdot \cos(kx - \omega t) \cdot \vec{e}_z$.
(a) Berechnen Sie das zugehörige magnetische Feld $\vec{B}$.
(b) Berechnen Sie den zugehörigen Poynting-Vektor $\vec{S}$.
(c) Berechnen Sie den zeitlichen Mittelwert der Intensität dieser Welle $\langle I(t) \rangle$.

Lösung: (a) $\vec{B}(x,t) = -(E_0/c) \cdot \cos(kx - \omega t) \cdot \vec{e}_y + (E_0/c) \cdot \sin(kx - \omega t) \cdot \vec{e}_z$, (b) $\vec{S} = \varepsilon_0 c \cdot E_0^2 \cdot \vec{e}_x$, (c) $\varepsilon_0 c \cdot E_0^2$

Aufgabe 7.4 - 3 Pkt.

Für welche der folgenden Funktionen ist die eindimensionale Wellengleichung $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ erfüllt und wenn ja unter welcher Bedingung?
Welche dieser Funktionen beschreiben periodische oder nichtperiodische fortschreitende Wellen?
(a) $E = E_0 \cdot \sin(kx - \omega t)$
(b) $E = E_0 \cdot \cos(kx - \omega t)$
(c) $E = E_0 \cdot e^{i(kx - \omega t)}$
(d) $E = E_0 \cdot \ln(x + ct)$
(e) $E = E_0 \cdot (x - ct)^4$
(f) $E = E_0 \cdot e^{-(x-ct)^2}$

Aufgabe 7.5 - **Freiwillige Zusatzaufgabe**

Zeigen Sie: Ersetzt man in der parabolische Näherung z durch $z + iz_0$, so erhält man einen Gauss-Strahl.

Hinweis: Ein Gauss-Strahl hat ein Intensitätsprofil, welches sich als 2D-Gauss-Funktion schreiben lässt:

$$I = I_0 \cdot \left(\frac{W_0}{W(z)}\right)^2 \cdot \exp\left(-\frac{2\left(x^2 + y^2\right)}{W^2(z)}\right)$$

($\exp() = e^{()}$ ist die Exponentialfunktion) mit

$$W(z) := W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \text{ und } W_0 := \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}}$$

Aufgabe 7.6 - 2 Pkt.

Die Brechzahl von Glas kann näherungsweise durch die empirische Cauchy-Beziehung $n = A + B/\lambda^2$ beschrieben werden.
Berechnen Sie hiermit Phasen- und Gruppengeschwindigkeit bei $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$ für ein Glas mit $A = 1.40$ und $B = 2.5 \cdot 10^4\,\mathrm{nm}^2$.

Lösung: Phasengeschwindigkeit $1.999 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$, Gruppengeschwindigkeit $1.732 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$

Aufgabe 7.7 - 2 Pkt.

Ein Material habe im Infraroten eine Absorptionslinie bei der Kreisfrequenz ω_0. Der Brechungsindex lässt sich außerhalb der Resonanzlinie näherungsweise durch $n \approx A + B/\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)$ mit den Konstanten A und B darstellen.

Berechnen Sie die Phasen- und die Gruppengeschwindigkeit.

Lösung: $v_{ph} = \frac{c}{n} = \frac{c}{A+B/\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}$,
$v_{gr} = \frac{c}{A+B\left(\omega_0^2+\omega^2\right)/\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}$

Aufgabe 7.8 - 2 Pkt.

Berechnen Sie den Brechungsindex n von Luft bei Atmosphärendruck und Raumtemperatur für Licht der Wellenlänge $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$ unter Verwendung der Beziehung
$n \approx 1 + \frac{N \cdot e^2}{2\varepsilon_0 \cdot m_e \cdot \left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+i\gamma\cdot\omega\right]}$
Sie können näherungsweise annehmen, dass die Luft nur aus Stickstoff (N_2) besteht. Stickstoff ist ein farbloses und durchsichtiges Gas und die Resonanzfrequenz der Stickstoffmoleküle liegt bei $\omega_0 = 10^{16}\,\mathrm{s}^{-1}$.

Lösung: $n \approx 1 + 4.5 \cdot 10^{-4}$