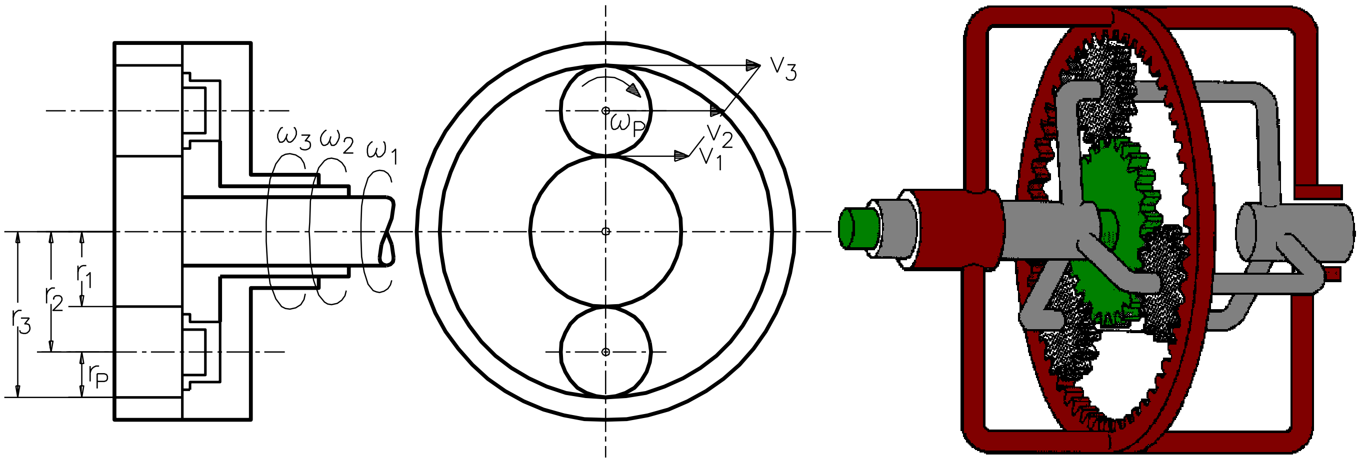
## Beispiele zur Kineamtik

- Planetengetriebe




**Geg.:** $r_1, r_2, r_3, r_P, \omega_1, \omega_2$;

**Ges.:** $\omega_3, \omega_P, v_1, v_2, v_3$.

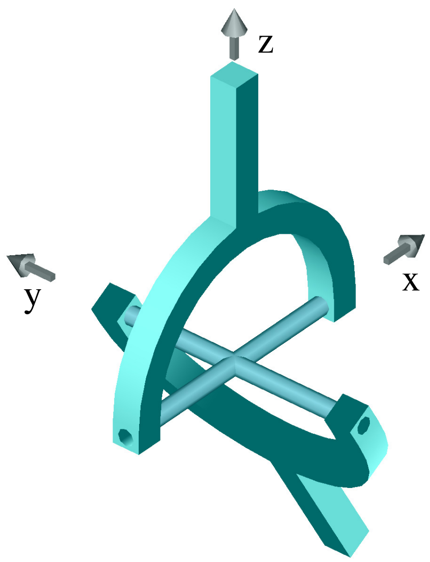
Aus der Rollbedingung zwischen den inneren Rädern („Sonnenrad“ und „Steg“) folgt

$$v_1 = r_1\omega_1 = v_2 - r_p\omega_p = r_2\omega_2 - (r_2 - r_1)\omega_p \Rightarrow \omega_p = (r_2\omega_2 - r_1\omega_1)/(r_2 - r_1).$$

Analog gilt wegen der Rollbedingung für die äußeren Räder („Steg“ und „Hohlrad“)

$$v_3 = r_3\omega_3 = v_2 + r_p\omega_p = r_2\omega_2 + (r_2 - r_1)\omega_p \Rightarrow \omega_3 = (r_2\omega_2 + (r_2 - r_1)\omega_p)/r_3.$$

- Kardangelenk




Das Kardangelenk dient zur Verbindung zweier umlaufender Wellen, deren Achsen einen Winkel $\alpha$ einschließen. Die Wellen tragen an ihren Enden je eine Gabel, die über ein starres Kreuz miteinander verbunden sind. Wir fragen nach dem Übersetzungsverhältnis, das ist das Verhältnis der (phasenabhängigen) Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1$ und $\omega_2$ der Wellen.
Die kinematische Fragestellung: Man ermittle für gegebenen Winkel $\alpha$ und Phase $\varphi_1$ der „oberen“ Welle die Phase $\varphi_2$ der „unteren“ Welle; um die aktuelle Stellung der unteren Welle zu beschreiben, sind 2 Elementardrehungen notwendig. Man überlege sich diese Drehungen. Der Zusammenhang der Phasen $\varphi_i$ ergibt sich aus der Forderung, dass das Kreuz seinen rechten Winkel beibehält.

**Geg.:** $\omega_1$, $\alpha$,

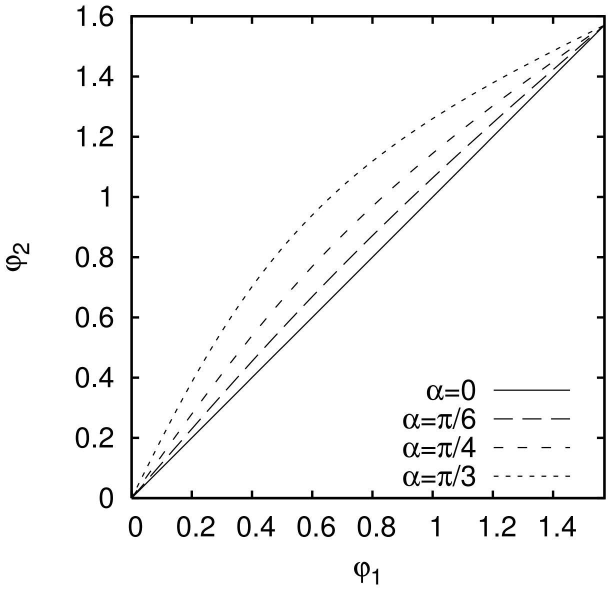
**Ges.:** $\omega_2$.

Wir legen den Koordinatenursprung in den Mittelpunkt des Kreuzes und wählen als Ausgangskonfiguration die gestreckte Lage der beiden Achsen ($\alpha = 0$), wobei ein Endpunkt $P$ der oberen Gabel an der Position $a\boldsymbol{e}_1$ und ein Endpunkt der unteren Gabel an der Position $Q = a\boldsymbol{e}_2$ liegen soll.
Dreht man die obere Gabel um den Winkel $\varphi_1$ um die vertikale Achse, so bewegt sich der Punkt $P$ an die Stelle

$$P' = a\mathbf{R}_3(\varphi_1)\boldsymbol{e}_1 = a(\cos\varphi_1, \sin\varphi_1, 0)^T.$$

Dreht man die untere Gabel um den Winkel $\varphi_2$ um die vertikale Achse und anschließend um den Winkel $-\alpha$ um die raumfeste $y$-Achse, so erhalten wir den neuen Punkt

$$\begin{aligned} Q' &= a\mathbf{R}_2(-\alpha)\mathbf{R}_3(\varphi_2)\boldsymbol{e}_2 \\ &= a(-\cos\alpha\sin\varphi_2, \cos\varphi_2, -\sin\alpha\sin\varphi_2)^T. \end{aligned}$$




Da die Ortsvektoren $P'$ und $Q'$ orthogonal bleiben, folgt aus $P' \cdot Q' = 0$

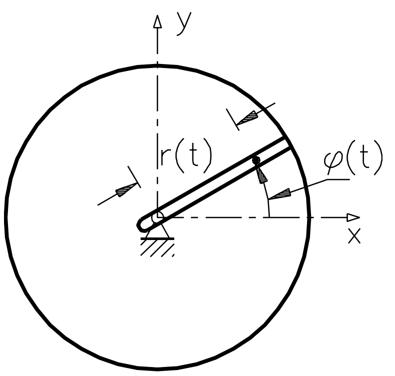
$$\cos\varphi_1\cos\alpha\sin\varphi_2 = \sin\varphi_1\cos\varphi_2, \qquad \text{bzw. } \tan\varphi_2 = \tan\varphi_1 / \cos\alpha.$$

Der Zusammenhang der beiden Winkel im Intervall $[0, \pi/2]$ ist in der Abbildung dargestellt; im Intervall $[\pi/2, \pi]$ kehrt sich die Beziehung um. Differenziert man die Beziehung (für konstantes $\alpha$) nach der Zeit, so erhalten wir die gesuchte Beziehung

$$\frac{\omega_2}{\cos^2\varphi_2} = \frac{\omega_1}{\cos\alpha\cos^2\varphi_1}.$$

- Rotierende Scheibe (Klausurbeispiel 1995)
  Eine Scheibe rotiert nach einem vorgegebenen Gesetz ($\varphi(t)$) um ihren Mittelpunkt. In einem radialen Schlitz der Scheibe bewegt sich reibungsfrei eine Punktmasse mit vorgegebenem Abstand $r(t)$ zum Mittelpunkt.

  Man ermittle bei vorgegebenem Winkel $\varphi(t)$ und Radialabstand $r(t)$



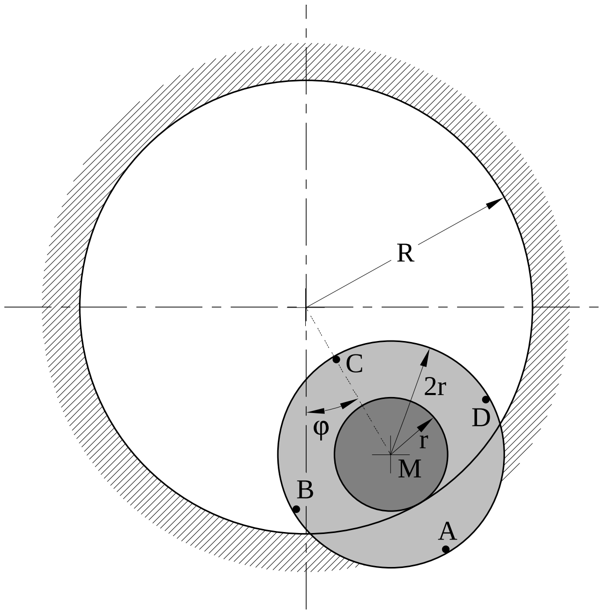

  1. die **Geschwindigkeit** und
  2. **Beschleunigung** der Punktmasse.
  3. Für die speziellen Funktionen

     $$r(t) = a \cdot (2 + \sin\alpha t) \text{ und } \varphi(t) = \beta t$$

     berechne man die Geschwindigkeit und Beschleunigung der Punktmasse.

  **Hinweise:** Fertigen Sie eine Skizze der Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren an.
  Verwenden Sie ein passendes Koordinatensystem!

- Scheiben (Klausurbeispiel Nov. 2006)
  Eine Kreisscheibe mit Radius $r$ rollt an der Innenseite eines ruhenden Zylinders mit Radius $R$. Der Winkel zwischen der Verbindungsgerade der beiden Mittelpunkte und der Vertikalen betrage $\varphi(t)$. Die rollende Scheibe ist konzentrisch mit einer zweiten Scheibe mit Radius $2r$ starr verbunden. Man ermittle bei gegebenem $\varphi(t)$ die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte $A \cdots D$, die mit der größeren Scheibe fest verbunden sind.




**Geg.:** Radius $R$, $r$, Winkel $\varphi(t)$;

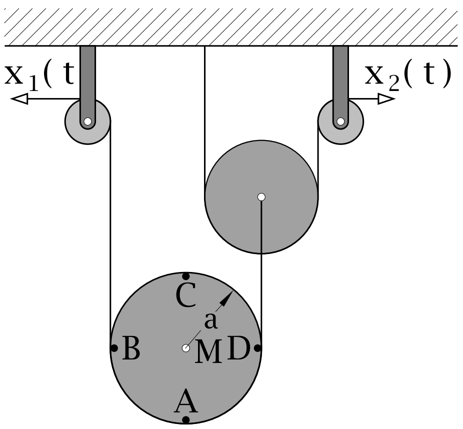
**Ges.:**

1. Geschwindigkeitsvektoren $\boldsymbol{v}_M$, $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_C$, $\boldsymbol{v}_D$,
   Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ der rollenden Scheiben,
2. Beschleunigungsvektoren $\boldsymbol{a}_M$, $\boldsymbol{a}_A$, $\boldsymbol{a}_B$, $\boldsymbol{a}_C$, $\boldsymbol{a}_D$;
3. Die Beschleunigungsvektoren im Spezialfall $\varphi(t) = a \sin t$ für $t = 0$, dh. in der vertikalen Lage.

**Annahme:** Die Punkte $A \dots D$ befinden sich am Umfang der Scheibe mit Radius $2r$.
Reines *Rollen* zwischen Zylinder und (kleiner) Scheibe.

**Hinweis:** Wählen Sie ein passendes Koordinatensystem!

- **Seilrollen** (Klausurbeispiel 2005)
  2 Kreisscheiben sind entsprechend der Abbildung auf undehnbaren Seilen aufgehängt. Die freien Seilenden werden nach einem vorgegebenen Gesetz $x_1(t)$ und $x_2(t)$ bewegt. Man ermittle den Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand der größeren Scheibe.




**Geg.:** Radius $a$, Positionen $x_1(1)$, $x_2(t)$ der Seilenden;

**Ges.:**

1. Geschwindigkeitsvektoren $\boldsymbol{v}_M$, $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_C$, $\boldsymbol{v}_D$,
   Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ der Scheibe,
2. Beschleunigungsvektoren $\boldsymbol{a}_M$, $\boldsymbol{a}_A$, $\boldsymbol{a}_B$, $\boldsymbol{a}_C$, $\boldsymbol{a}_D$;
3. Die Beschleunigungsvektoren im Spezialfall $x_1(t) = x_2(t) = ct$ für $t = 0$, dh. in der gezeichneten Lage.

**Annahme:** Die Punkte $A \dots D$ befinden sich am Umfang der Scheibe.
Reines *Rollen* zwischen Scheiben und Seil.