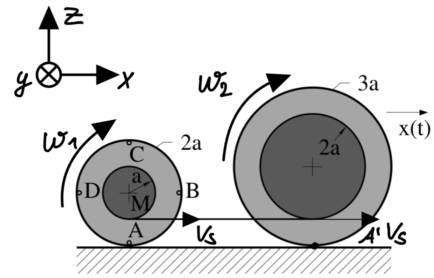
Klausurbeispiele November 2001

1. **Seilrollen**

   2 Kreisscheiben (Radius $3a$ bzw. $2a$) rollen auf einer rauen Unterlage. Auf diesen Scheiben sind 2 weitere Scheiben mit Radius $2a$ bzw. a befestigt, die gemäß Skizze durch ein undehnbares Seil verbunden sind. Die Position des Mittelpunkts der rechten größeren Scheibe sei $x(t)$. Man ermittle den Bewegungszustand des Systems.



$\vec{V}_A = \vec{0}$

Geg.: Radius a, $2a$, $3a$; Position $x(t)$ des Mittelpunkts der rechten Scheibe; Momentane Lage y der zweiten Scheibe.

Ges.:

(a) Geschwindigkeitsvektoren v_M, v_A, v_B, v_C, v_D, Winkelgeschwindigkeit ω_i der Scheiben,

(b) Beschleunigungsvektoren a_M, a_A, a_B, a_C, a_D;

(c) Die Beschleunigungsvektoren im Spezialfall $x(t) = ct$ für $t = 0$, dh. in der gezeichneten Lage.

Annahme: Die Punkte $A \dots D$ befinden sich am Umfang der zweiten Scheibe. Reines *Rollen* zwischen Scheiben und Seil.

a) Abrollbed.: $V_{A'} = \dot{x} - \omega_2 \cdot 3a = 0 \longrightarrow \omega_2 = \frac{\dot{x}}{3a}$; $\vec{\omega}_2 = \frac{\dot{x}}{3a}\vec{e}_y$

$V_S = \dot{x} - \omega_2 \cdot 2a = \dot{x} - \frac{2}{3}\dot{x} = \frac{\dot{x}}{3}$

Abrollbed.: $V_A = 0 = V_M - \omega_1 \cdot 2a$
$V_S = \frac{\dot{x}}{3} = V_M - \omega_1 \cdot a$ −

$\longrightarrow -\frac{\dot{x}}{3} = -\omega_1 \cdot a \longrightarrow \omega_1 = \frac{\dot{x}}{3a}$; $\vec{\omega}_1 = \frac{\dot{x}}{3a}\vec{e}_y$

$\longrightarrow V_M = \omega_1 \cdot 2a \longrightarrow \vec{V}_M = \frac{2\dot{x}}{3}\vec{e}_x$

$$\boxed{\vec{V}_\alpha = \vec{V}_M + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{\alpha\beta}}$$

$\vec{V}_B = \vec{V}_M + \omega_1 \cdot 2a(\vec{e}_y \times \vec{e}_x) = \frac{2\dot{x}}{3}\vec{e}_x - \frac{2\dot{x}}{3}\vec{e}_z$

$\vec{V}_C = \vec{V}_M + \omega_1 \cdot 2a(\vec{e}_y \times \vec{e}_z) = \frac{2\dot{x}}{3}\vec{e}_x + \frac{2\dot{x}}{3}\vec{e}_x = \frac{4\dot{x}}{3}\vec{e}_x$

$\vec{V}_D = \vec{V}_M + \omega_1 \cdot 2a(\vec{e}_y \times -\vec{e}_x) = \frac{2\dot{x}}{3}\vec{e}_x + \frac{2\dot{x}}{3}\vec{e}_z$

b) $$\boxed{\vec{a}_\beta = \frac{d\vec{V}_M}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_i}{dt} \times \vec{r}_\beta + \vec{\omega}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_\beta)}$$

$\dot{\vec{\omega}}_1 = \dot{\vec{\omega}}_2 = \frac{d\vec{\omega}_i}{dt} = \frac{\ddot{x}}{3a}\vec{e}_y$; $\vec{a}_M = \frac{2\ddot{x}}{3}\vec{e}_x$

$\vec{a}_A = \frac{2\ddot{x}}{3}\vec{e}_x + \frac{\ddot{x}}{3\cancel{a}} \cdot 2\cancel{a}(\vec{e}_y \times -\vec{e}_z) + \frac{\dot{x}^2}{9a^{\cancel{2}}} \cdot 2\cancel{a}(\vec{e}_y \times (\vec{e}_y \times -\vec{e}_z)) = \frac{2\dot{x}^2}{9a}\vec{e}_z$

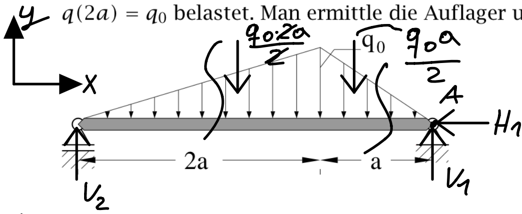
$\vec{a}_B = \frac{2\ddot{x}}{3}\vec{e}_x + \frac{2\ddot{x}}{3}(\vec{e}_y \times \vec{e}_x) + \frac{2\dot{x}^2}{9a}(\vec{e}_y \times (\vec{e}_y \times \vec{e}_x)) = \frac{2\ddot{x}}{3}(\vec{e}_x - \vec{e}_z) - \frac{2\dot{x}^2}{9a}\vec{e}_x$

$\vec{a}_C = \frac{2\ddot{x}}{3}\vec{e}_x + \frac{2\ddot{x}}{3}(\vec{e}_y \times \vec{e}_z) + \frac{2\dot{x}^2}{9a}(\vec{e}_y \times (\vec{e}_y \times \vec{e}_z)) = \frac{4\ddot{x}}{3}\vec{e}_x - \frac{2\dot{x}^2}{9a}\vec{e}_z$

$\vec{a}_D = \frac{2\ddot{x}}{3}\vec{e}_x + \frac{2\ddot{x}}{3}(\vec{e}_y \times -\vec{e}_x) + \frac{2\dot{x}^2}{9a}(\vec{e}_y \times (\vec{e}_y \times -\vec{e}_x)) = \frac{2\ddot{x}}{3}(\vec{e}_x + \vec{e}_z) + \frac{2\dot{x}^2}{9a}\vec{e}_x$

c) $$\boxed{\vec{a}_M = 0,\ \vec{a}_B = -\frac{2c^2}{9a}\vec{e}_x,\ \vec{a}_C = -\frac{2c^2}{9a}\vec{e}_z,\ \vec{a}_D = \frac{2c^2}{9a}\vec{e}_x}$$

2. **Balken**
Ein Balken der Länge $3a$ ist gemäß Skizze beidseitig gelagert und wird durch eine Dreieckslast $q(x)$ mit $q(2a) = q_0$ belastet. Man ermittle die Auflager und Schnittkräfte des Systems.



Geg : Länge a, q_0;

Ges.: (a) Auflagerkräfte,

(b) Schnittkräfte $N(x)$, $Q(x)$ und $M(x)$ mit **Skizze** (!).

a)

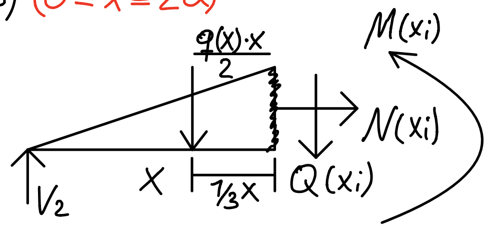
$H_1 = 0$

$V_1 + V_2 - q_0 a - \frac{q_0 a}{2} = 0 \longrightarrow V_1 = \frac{3 q_0 a}{2} - V_2$

$(A\circlearrowleft): -V_2 \cdot 3\cancel{a} + q_0 \cancel{a}\left(a + \frac{1}{3} \cdot 2a\right) + \frac{q_0 a}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cancel{a} = 0 \longrightarrow \frac{2}{3} q_0 a = V_2$

$V_1 = \frac{5}{6} q_0 a$

b) $(0 \leq x \leq 2a)$



$\frac{q_0}{2a} = \frac{q(x)}{x} \longrightarrow q(x) = \frac{q_0}{2a} x$

$\frac{q(x) \cdot x}{2} = \frac{q_0}{4a} x^2$

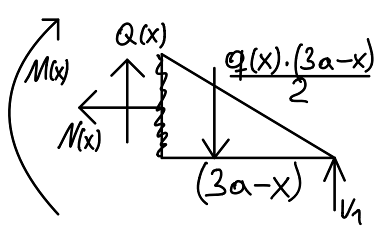
$\overset{+}{\rightarrow}: N(x) = 0$

$+\uparrow: V_2 - \frac{q_0}{4a} x^2 - Q(x) = 0 \longrightarrow Q(x) = \frac{q_0}{4a} x^2 - \frac{5}{6} q_0 a$

$\circlearrowleft: \frac{q_0}{4a} x^2 \cdot \frac{1}{3} x + M(x) - V_2 \cdot x = 0 \longrightarrow M(x) = \frac{2 q_0 a}{3} x - \frac{q_0}{12a} x^3$

$Q(0) = -\frac{5}{6} q_0 a;\ Q(2a) = \frac{q_0 a}{6};\ M(0) = 0;\ M(2a) = \frac{2 q_0 a^2}{3}$

$(2a \leq x \leq 3a)$



$\frac{q_0}{a} = \frac{q(x)}{(3a-x)} \longrightarrow q(x) = \frac{q_0}{a}(3a-x)$

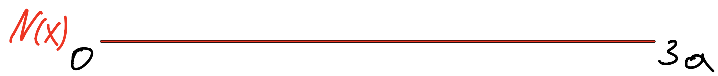
$\frac{q(x) \cdot (3a-x)}{2} = \frac{q_0}{2a}(3a-x)^2$

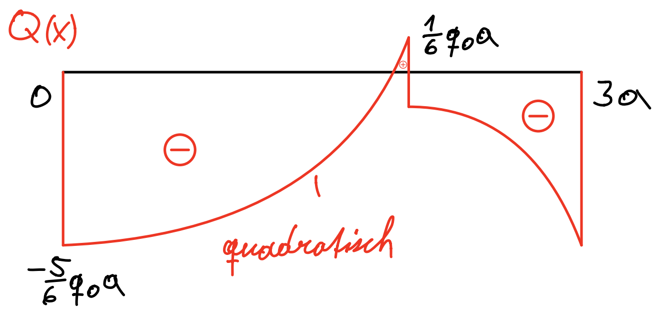
$\overset{+}{\rightarrow}: N(x) = 0$

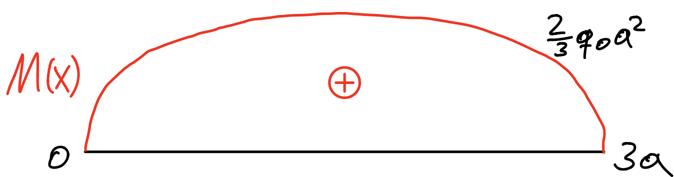
$+\uparrow: Q(x) + V_1 - \frac{q_0}{2a}(3a-x)^2 = 0 \longrightarrow Q(x) = \frac{q_0}{2a}(3a-x)^2 - \frac{5}{6} q_0 a$

$\circlearrowleft: V_1(3a-x) - \frac{q_0}{2a}(3a-x)^2 \cdot \frac{1}{3}(3a-x) - M(x) = 0 \longrightarrow M(x) = \frac{5}{6} q_0 a \cdot (3a-x) - \frac{q_0}{6a}(3a-x)^3$

$Q(2a) = -\frac{1}{3} q_0 a;\ Q(3a) = -\frac{5}{6} q_0 a;\ M(2a) = \frac{2}{3} q_0 a^2;\ M(3a) = 0$


N(x)
0
3a


Q(x)
1/6 q0a
0
3a
−5/6 q0a
quadratisch


M(x)
2/3 q0a²
0
3a