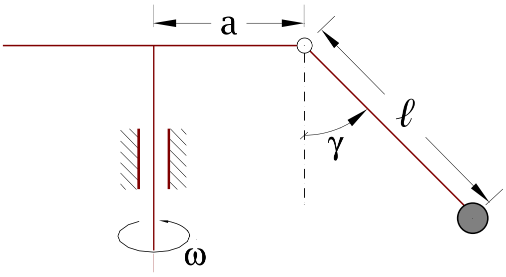
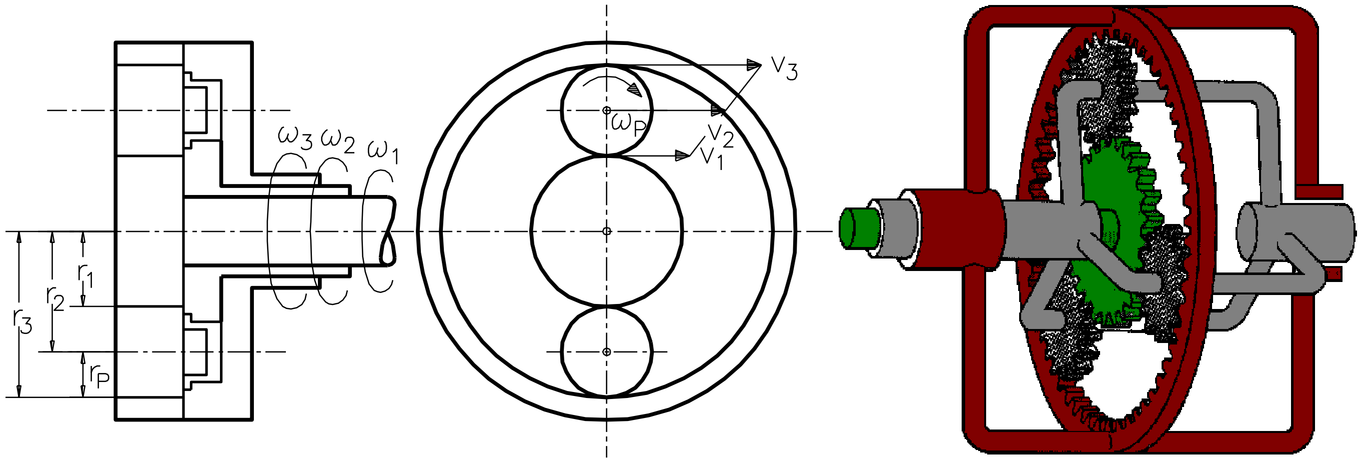
Beispiele zur „Relativkinematik“



Ringelspiel Ein Stab der Länge ℓ dreht sich in der vertikalen Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\gamma}(t)$ um ein Gelenk, welches im Abstand a mit Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$ um die vertikale Achse rotiert.
Man ermittle den Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand der Punktmasse am unteren Ende des Stabes.

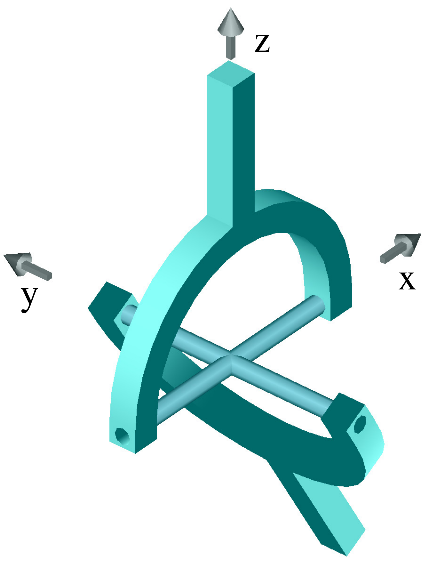
Planetengetriebe



Geg.: r_1, r_2, r_3, r_P, ω_1, ω_2;

Ges.: ω_3, ω_P, v_1, v_2, v_3.

Kardangelenk

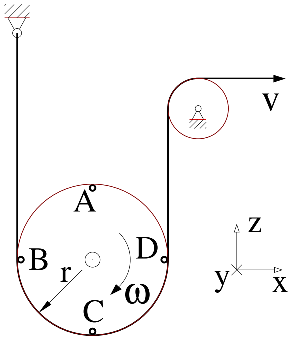


Das Kardangelenk dient zur Verbindung zweier umlaufender Wellen, deren Achsen einen Winkel α einschließen. Die Wellen tragen an ihren Enden je eine Gabel, die über ein starres Kreuz miteinander verbunden sind. Wir fragen nach dem Übersetzungsverhältnis, das ist das Verhältnis der (phasenabhängigen) Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 der Wellen.
Die kinematische Fragestellung: Man ermittle für gegebenen Winkel α und Phase φ_1 der „oberen“ Welle die Phase φ_2 der „unteren“ Welle; um die aktuelle Stellung der unteren Welle zu beschreiben, sind 2 Elementardrehungen notwendig. Man überlege sich diese Drehungen. Der Zusammenhang der Phasen φ_i ergibt sich aus der Forderung, dass das Kreuz seinen rechten Winkel beibehält.
Zur Zeit $t = 0$ nehme das Gelenk die skizzierte Lage ein.

Geg.: Winkelgeschwindigkeit ω_1 der obenen Welle, Verdrehwinkel der unteren Achse aus der gestreckten Lage α,

Ges.: ω_2.

Seilrollen

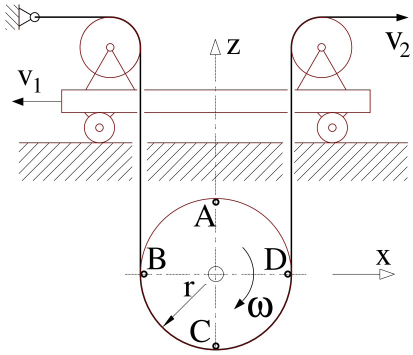


Geg.: $\boldsymbol{v}(t)$, r.

Ges.: Geschwindigkeit und Beschleunigung der Scheibe an den Positionen: Zentrum, A, B, C, D; Winkelgeschwindigkeit ω.

Lösung: $\boldsymbol{v}_B = 0$, $\boldsymbol{v}_D = v\boldsymbol{e}_3$, $\omega = v/(2r)$, $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{v}_M = v/2\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{v}_C = c/2\,(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3)$, $\boldsymbol{v}_D = c/2\,(-\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3)$.

Für die Beschleunigungen ergibt sich: $\boldsymbol{a}_M = \dot{v}\boldsymbol{e}_3/2$ und $\dot{\omega} = \dot{v}/(2r)$. Daraus folgen die restlichen Beschleunigungsvektoren.



Geg.: $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, r.

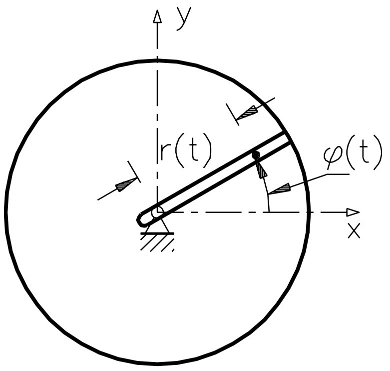
Ges.: Geschwindigkeit und Beschleunigung des Zentrums der Scheibe; Winkelgeschwindigkeit ω, $\dot{\omega}$, $\boldsymbol{v}_A \ldots \boldsymbol{v}_D$, $\boldsymbol{a}_A \ldots \boldsymbol{a}_D$.

Annahme: Kein Schaukeln der Scheibe: Der Mittelpunkt der Scheibe liege auf der Streckensymmetrale der beiden Rollen.

Rotierende Scheibe

(Klausurbeispiel 1995)
Eine Scheibe rotiert nach einem vorgegebenen Gesetz ($\varphi(t)$) um ihren Mittelpunkt. In einem radialen Schlitz der Scheibe bewegt sich reibungsfrei eine Punktmasse mit vorgegebenem Abstand $r(t)$ zum Mittelpunkt.

Man ermittle bei vorgegebenem Winkel $\varphi(t)$ und Radialabstand $r(t)$



1. die **Geschwindigkeit** und
2. **Beschleunigung** der Punktmasse.
3. Für die speziellen Funktionen

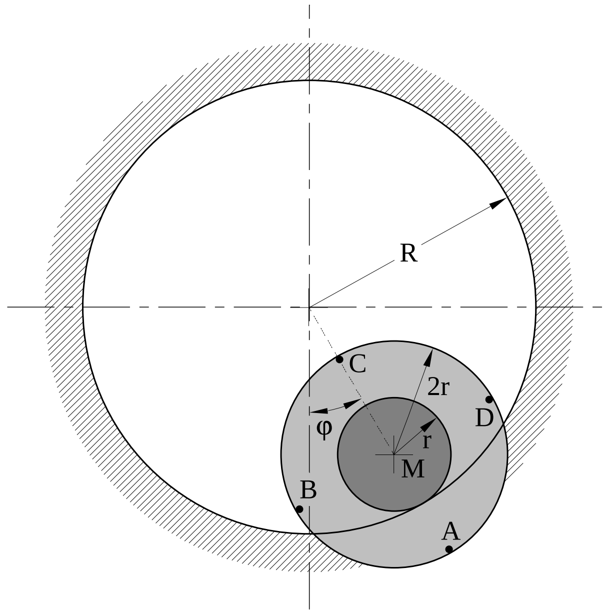
$$r(t) = a \cdot (2 + \sin \alpha t) \text{ und } \varphi(t) = \beta t$$

berechne man die Geschwindigkeit und Beschleunigung der Punktmasse.

Hinweise: Fertigen Sie eine Skizze der Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren an.
Verwenden Sie ein passendes Koordinatensystem!

Scheiben

(Klausurbeispiel Nov. 2006)
Eine Kreisscheibe mit Radius r rollt an der Innenseite eines ruhenden Zylinders mit Radius R. Der Winkel zwischen der Verbindungsgerade der beiden Mittelpunkte und der Vertikalen betrage $\varphi(t)$. Die rollende Scheibe ist konzentrisch mit einer zweiten Scheibe mit Radius $2r$ starr verbunden. Man ermittle bei gegebenem $\varphi(t)$ die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte $A \cdots D$, die mit der größeren Scheibe fest verbunden sind.



Geg.: Radius R, r, Winkel $\varphi(t)$;

Ges.:

1. Geschwindigkeitsvektoren $\boldsymbol{v}_M$, $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_C$, $\boldsymbol{v}_D$,
   Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ der rollenden Scheiben,
2. Beschleunigungsvektoren $\boldsymbol{a}_M$, $\boldsymbol{a}_A$, $\boldsymbol{a}_B$, $\boldsymbol{a}_C$, $\boldsymbol{a}_D$;
3. Die Beschleunigungsvektoren im Spezialfall $\varphi(t) = a \sin t$ für $t = 0$, dh. in der vertikalen Lage.

Annahme: Die Punkte $A \ldots D$ befinden sich am Umfang der Scheibe mit Radius $2r$.
Reines *Rollen* zwischen Zylinder und (kleiner) Scheibe.

Hinweis: Wählen Sie ein passendes Koordinatensystem!

Berechnung der Winkelgeschwindigkeiten für Eulersche Winkel in räumlichen Koordinaten

Die Lage eines starren Körpers sei durch Eulersche Winkel charakterisiert:

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}_3(\psi)\mathbf{R}_1(\vartheta)\mathbf{R}_3(\varphi).$$

Explizit angeschrieben ergibt lautet sie[1]

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\cos\psi - \cos\vartheta\,\sin\varphi\,\sin\psi & -\cos\psi\,\sin\varphi - \cos\varphi\,\cos\vartheta\,\sin\psi & \sin\psi\,\sin\vartheta \\ \cos\varphi\,\sin\psi + \cos\psi\,\cos\vartheta\,\sin\varphi & \cos\varphi\,\cos\psi\,\cos\vartheta - \sin\varphi\,\sin\psi & -\cos\psi\,\sin\vartheta \\ \sin\varphi\,\sin\vartheta & \cos\varphi\,\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Man bestimme nun die Winkelgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\omega}$ (bzw. die dazugerörige schiefsymmetrische Matrix $\hat{\boldsymbol{\omega}}$).

Noch ein Hinweis: Man sollte beim Differenzieren nach der Produktregel die raumbezogenen Winkelgeschwindigkeitsmatrizen verwenden und diese dann an die passende Stelle befördern.

Lösung in Komponentenschreibweise:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\,\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ -\sin\vartheta\,\cos\psi & \sin\psi & 0 \\ \cos\vartheta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\varphi \\ \dot\vartheta \\ \dot\psi \end{pmatrix}.$$

[1] Man sollte sie einmal zu Gesicht bekommen haben. In der letzten Spalte finden Sie die Richtung der ursprünglich vertikalen Achse. Es ist beim Studium von Artikeln, die Eulerwinkel verwenden, hilfreich, sich diesen Vektor anzusehen: Hin und wieder wird eine andere Reihenfolge der Rotationen verwendet, φ und ψ sind gelegentlich vertauscht. Auf diese Weise lässt sich schnell herausfinden, welche Konvention für Eulerwinkel verwendet wurde, falls diese im Artikel nicht angegeben ist.