(Akademisches) Beispiel zur Verwendung von Polarkoordinaten

Wir möchten die Bewegung eines Punktes in Polarkoordinaten beschreiben. In kartesischen Koordinaten soll sich der Punkt mit konstanter Geschwindigkeit c[1] entlang der Geraden $x_2 = d$ bewegen:

$$\boldsymbol{r}(t) = ct\boldsymbol{e}_1 + d\boldsymbol{e}_2. \tag{1}$$

Die Koeffizienten in der räumlich festen Basis $\boldsymbol{e}_i$ lauten daher

$$x_1(t) = ct, \qquad x_2(t) = d. \tag{2}$$

Es ergibt sich unmittelbar

$$\boldsymbol{v}(t) = c\boldsymbol{e}_1 \qquad \text{und } \boldsymbol{a} = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Variante A: Mit konstanter Geschwindigkeit rotierende Polarkoordinaten

Wir wollen nun diese Bewegung in einem mit fester Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Polarkoordinatensystem beschreiben:

$$\boldsymbol{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \text{mit } \varphi(t) = \omega t. \tag{4}$$

Da die Basisvektoren $\boldsymbol{e}_j$, $j \in \{r, \varphi\}$ orthonormal sind, ergeben sich die Koeffizienten in dieser Basis durch Projektion von $\boldsymbol{r}$ auf die Basisvektoren:

$$A_r = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}_r = ct\cos(\omega t) + d\sin(\omega t), \quad A_\varphi = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}_\varphi = -ct\sin(\omega t) + d\cos(\omega t). \tag{5}$$

Wir suchen nun die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{v}$ in Polarkoordinaten und erhalten

$$\begin{aligned} B_r &= \dot{A}_r - A_\varphi\dot{\varphi} \\ &= c\cos(\omega t) + (-ct\sin(\omega t) + d\cos(\omega t))\omega - (-ct\sin(\omega t) + d\cos(\omega t))\omega = c\cos(\omega t), \\ B_\varphi &= \dot{A}_\varphi + A_r\dot{\varphi} \\ &= -c\sin(\omega t) + (-ct\cos(\omega t) - d\sin(\omega t))\omega + (ct\cos(\omega t) + d\sin(\omega t))\omega = -c\sin(\omega t). \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht, dass $\boldsymbol{v} = B_r\boldsymbol{e}_r + B_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$ gilt.

Um die Beschleunigungen zu bestimmen, wenden wir die Formel für $\boldsymbol{a}$ an: $\boldsymbol{a} = C_r\boldsymbol{e}_r + C_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$, mit

$$\begin{aligned} C_r &= \dot{B}_r - B_\varphi\dot{\varphi} \\ &= -c\sin(\omega t)\omega - (-c\sin\omega t)\omega = 0, \\ C_\varphi &= \dot{B}_\varphi + B_r\dot{\varphi} \\ &= -c\cos(\omega t)\omega + c\cos(\omega t)\omega = 0. \end{aligned}$$

[1] Wir bewegen uns in der klassischen Mechanik, c hat daher *nichts* mit der Lichtgewschwindigkeit zu tun.

Variante B: Mit dem Punkt $\boldsymbol{r}$ rotierende Polarkoordinaten

Wir wählen nun den Winkel φ so, dass der Punkt $\boldsymbol{r}$ auf der $\boldsymbol{e}_r$-Achse liegt:

$$\varphi = \arctan \frac{x_2}{x_1} = \arctan \frac{d}{ct}. \tag{6}$$

Nun ist also $A_\varphi = 0$ und $A_r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{(ct)^2 + d^2}$. Mit

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{1 + d^2/(ct)^2} \frac{-d}{(ct)^2} c = \frac{-cd}{(ct)^2 + d^2}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} B_r &= \dot{A}_r - A_\varphi \dot{\varphi} \\ &= \frac{c^2 t}{\sqrt{(ct)^2 + d^2}}, \\ B_\varphi &= \dot{A}_\varphi + A_r \dot{\varphi} = \\ &= \sqrt{(ct)^2 + d^2}\,\dot{\varphi} \\ &= \frac{(ct)^2}{\sqrt{(ct)^2 + d^2}} \frac{-cd}{(ct)^2} = \frac{-cd}{\sqrt{(ct)^2 + d^2}}. \end{aligned}$$

Für die Beschleunigungskoeffizienten ergeben sich die Ausdrücke

$$\begin{aligned} C_r &= \dot{B}_r - B_\varphi \dot{\varphi} \\ &= \frac{c^2}{\sqrt{(ct)^2 + d^2}} - \frac{(c^2 t)^2}{\sqrt{(ct)^2 + d^2}^3} - \frac{-cd}{\sqrt{(ct)^2 + d^2}} \dot{\varphi} = 0, \\ C_\varphi &= \dot{B}_\varphi + B_r \dot{\varphi} \\ &= \frac{cd\, c^2 t}{\sqrt{(ct)^2 + d^2}} + \frac{c^2 t}{\sqrt{(ct)^2 + d^2}} \dot{\varphi} = 0. \end{aligned}$$

Die Rechnung ließe sich an einigen Stellen deutlich vereinfachen, zum Beispiel ergibt sich $B_r = c \cos \varphi$ (warum?), aber das Ziel dieses Beispiels ist, Ihnen den Umgang mit den Koeffizientenfunktionen nahezubringen.