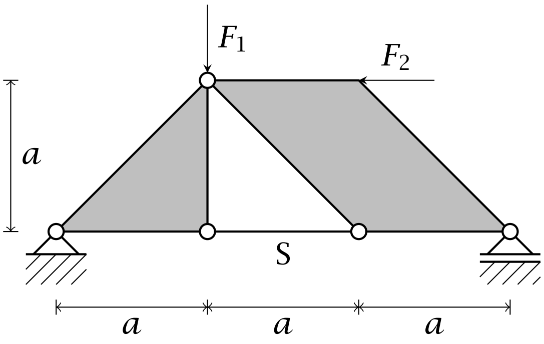
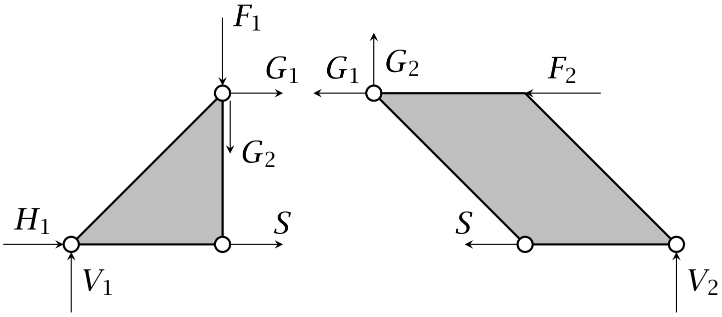
1. **Gruppe A: Gleichgewicht**
Zwei starre Scheiben mit den angegebenen Abmessungen sind gemäß Skizze gelagert und durch eine Stange S gestützt; sie werden durch zwei Kräfte F_1 und F_2 belastet. Man bestimme die Kräfte in den Auflagern und Gelenken.



Geg.: a, F_1, F_2;

Ges.: (a) Auflagerkräfte;

(b) Kräfte in den Gelenken.



Äußeres Gleichgewicht:

$$H_1 - F_2 = 0,$$
$$V_1 + V_2 - F_1 = 0,$$
$$(3V_2 - F_1 + F_2)\,a = 0.$$

Gleichgewichtsbedingungen für linke Scheibe:

$$V_1 - F_1 + G_2 = 0,$$
$$H_1 + S + G_1 = 0,$$
$$a(H_1 - V_1 + S) = 0.$$

Bemerkungen:

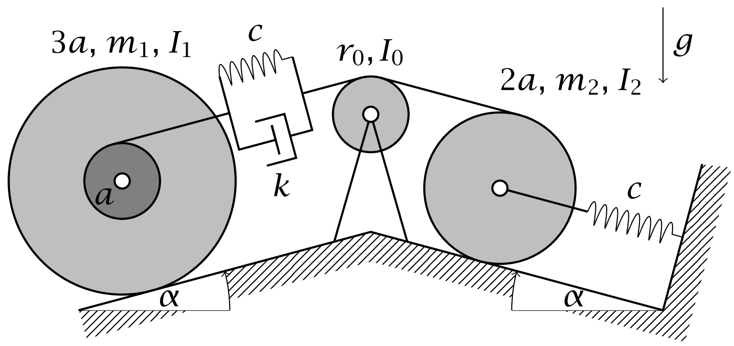
- Aus den angegebenen Gleichungen lassen sich die gesuchten Kräfte leicht berechnen.
- Die Auflagerkräfte lassen sich natürlich auch ermitteln, indem die Gleichgewichtsbedingungen für die beiden Scheiben aufgestellt werden. Es empfiehlt sich dabei, die Momentengleichgewichte um das obere Gelenk anzusetzen und die Gelenkskräfte für beide Teile durch die restlichen Kräfte auszudrücken und gleichzusetzen:

$$a(H_1 - V_1 + S) = 0,$$
$$a(-S + 2V_2) = 0,$$
$$-H_1 - S = G_1 = -F_2 - S,$$
$$V_1 - F_1 = G_2 = -V_2.$$

- Die Kraft F_1 darf nur einmal berücksichtigt werden.
- Die Stange S kann nur die horizontale Kraft S aufnehmen. (Warum ?)

2. **Seilrollen**
Ein Seilrollensystem ist wie skizziert angeordnet: Die linke Scheibe (Außenradius $3a$, Masse m_1, Trägheitsmoment I_1) rollt ohne zu gleiten auf einer schrägen Unterlage mit Steigungswinkel α und ist über ein Seil, das auf einer starr mit dieser Scheibe verbundenen Seiltrommel (Radius a) abrollt mit einem Federdämpfersystem (Federkonstante c, Dämpferkonstante k), einer Umlenkrolle (Trägheitsmoment I_0, Radius r_0) und einer zweiten Scheibe (Radius $2a$, Masse m_2, Trägheitsmoment I_2) verbunden, die über eine Feder der Steifigkeit c mit der Berandung verbunden ist. Auch die zweite Scheibe rollt ohne zu gleiten auf der mit dem Winkel α geneigten Unterlage.

Gesucht sind die Bewegungsgleichungen mittels **Impuls- und Drallsatz** (optional mittels des Satzes von d'Alembert).



Geg.: a, r_0, m_1, m_2, I_0, I_1, I_2, α, c, k, g;

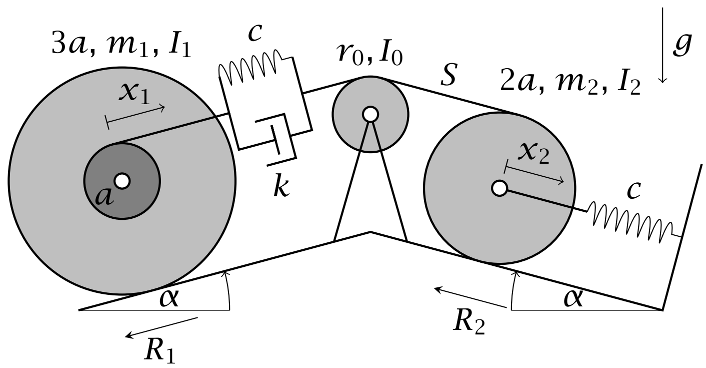
Ges.: (a) Freiheitsgrade;

(b) Bewegungsgleichungen mittels **Impuls- und Drallsatz**;

Annahmen: reines Rollen, Federn sind in der gezeichneten Lage entspannt;

Hinweis: Die Seilkräfte müssen nicht mehr eliminiert werden.

Lösung: Eine zweckmäßige Wahl der Freiheitsgrade ist in der folgenden Abbildung skizziert.



Als Freiheitsgrade werden die Auslenkungen x_i der beiden beweglichen Rollen aus der entspannten Lage gewählt. Für die Drehwinkel (im Uhrzeigersinn) gilt

$$\varphi_1 = x_1/(3a),$$
$$\varphi_2 = x_2/(2a),$$
$$\varphi_0 = 2x_2/r_0.$$

Für das Feder-Dämpfersystem erhält man die Längenänderung der Feder

$$\Delta\ell = 2x_2 - 4x_1/3, \quad \text{daher } F_{FD} = c(2x_2 - 4x_1/3) + k(2\dot{x}_2 - 4\dot{x}_1/3),$$

die Federkraft der einzelnen Feder ergibt sich zu $F_F = -cx_2$.

Die Impulssätze für die beiden Rollen und Drallsätze für alle 3 Rollen lauten daher

$$\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 &= F_{FD} - R_1 - m_1 g \sin\alpha, \\
I_1\ddot{x}_1/(3a) &= a(F_{FD} + 3R_1), \\
m_2\ddot{x}_2 &= -S - R_2 + m_2 g \sin\alpha + F_F, \\
I_2\ddot{x}_2/(2a) &= 2a(R_2 - S), \\
I_0(2\ddot{x}_2/r_0) &= r_0(S - F_{FD}).
\end{aligned}$$

Eliminiert man noch die Kräfte R_i und S aus den Drallsätzen, ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\left(m_1 + I_1/(9a^2)\right)\ddot{x}_1 &= 4F_{FD}/3 - m_1 g \sin\alpha, \\
\left(m_2 + I_2/(4a^2) + 4I_0/r_0^2\right)\ddot{x}_2 &= -2F_{FD} + m_2 g \sin\alpha - cx_2.
\end{aligned}$$

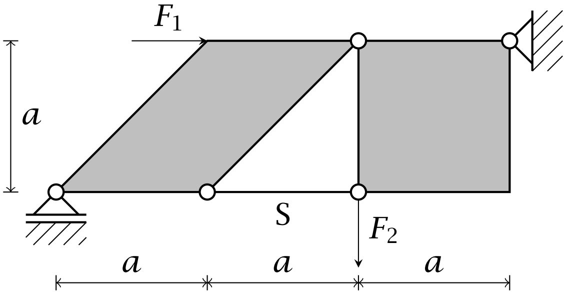
Bemerkungen:

- Die Trägheitsmomente I_i waren angegeben; es ist ein Fehler, sie durch $m_i r_i^2/2$ zu ersetzen. Dieser Ausdruck gilt für homogene Scheiben, aber nicht für komplizierter gebaute Rollen.
- Für die Behandlung dieses Beispiels ist die korrekte Bestimmung der Anzahl der Freiheitsgrade unabdingbar.
- Die überwiegende Mehrheit der KandidatInnen hat die Federlänge falsch bestimmt. Einfach die "Standardformel" $\Delta\ell = x_2 - x_1$ zu verwenden, ist grob falsch.

- Die Reibungskräfte R_i sind für die Einhaltung der Rollbedingung notwendig. Sie bestimmen sich aus den Drallsätzen.

  Die Formel $R_i = \mu N_i$ würde nur gelten, wenn Gleiten zulässig wäre; in diesem Fall wären die Drehwinkel weitere Freiheitsgrade.

3. **Gruppe B: Gleichgewicht**
   Zwei starre Scheiben mit den angegebenen Abmessungen sind gemäß Skizze gelagert und durch eine Stange S gestützt; sie werden durch zwei Kräfte F_1 und F_2 belastet. Man bestimme die Kräfte in den Auflagern und Gelenken.



Geg.: a, F_1, F_2;

Ges.: (a) Auflagerkräfte;

(b) Kräfte in den Gelenken.

Teilt man das System analog zum Beispiel der Gruppe A auf, so lauten die äußeren Gleichgewichtsbeziehungen:

$$F_1 - H_2 = 0,$$
$$V_1 + V_2 - F_2 = 0,$$
$$(-3V_1 + F_2)a = 0.$$

Die Gelenkskräfte und die Stabkraft S ergeben sich wiederum aus den Gleichgewichtsbeziehungen für die linke Scheibe:

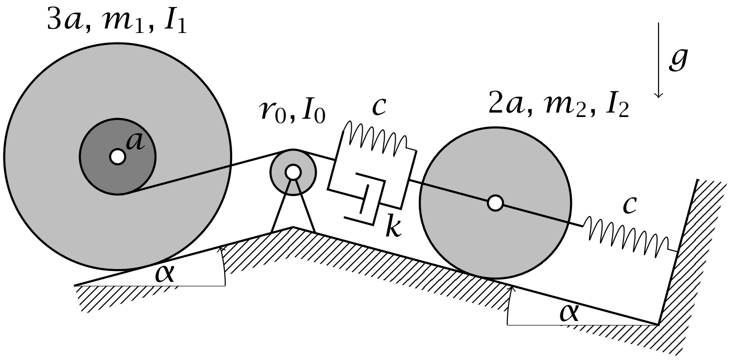
$$V_1 - G_2 = 0,$$
$$F_1 + G_1 + S = 0,$$
$$a(S - 2V_1) = 0.$$

Die Bestimmung der gesuchten Kräfte aus diesen Gleichungen ist ein Kinderspiel. Selbstverständlich lassen sich die Kräfte auch ermitteln, indem beide Scheiben getrennt ins Gleichgewicht gesetzt werden und das Gleichungssystem für die 6 Unbekannten gelöst wird.

4. **Seilrollen**
   Ein Seilrollensystem ist wie skizziert angeordnet: Die linke Scheibe (Außenradius $3a$, Masse m_1, Trägheitsmoment I_1) rollt ohne zu gleiten auf einer schrägen Unterlage mit Steigungswinkel α und ist über ein Seil, das auf einer starr mit dieser Scheibe verbundenen Seiltrommel (Radius a) abrollt mit einem Federdämpfersystem (Federkonstante c, Dämpferkonstante k), einer Umlenkrolle (Trägheitsmoment I_0, Radius r_0) und einer zweiten Scheibe (Radius $2a$, Masse m_2, Trägheitsmoment I_2) verbunden, die über eine Feder der Steifigkeit c mit der Berandung verbunden ist. Auch die zweite Scheibe rollt ohne zu gleiten auf der mit dem Winkel α geneigten Unterlage.

   Gesucht sind die Bewegungsgleichungen mittels **Impuls- und Drallsatz** (optional mittels des

Satzes von d'Alembert).



Geg.: a, r_0, m_1, m_2, I_0, I_1, I_2, α, c, k, g;

Ges.: (a) Freiheitsgrade;

(b) Bewegungsgleichungen mittels **Impuls- und Drallsatz**;

Annahmen: reines Rollen, Federn sind in der gezeichneten Lage entspannt;

Hinweis: Die Seilkräfte müssen nicht mehr eliminiert werden.

Lösung: Wir setzen die Freiheitsgrade wie bei der Gruppe A an und erhalten nun die Beziehungen

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= x_1/(3a), & \varphi_2 &= x_2/(2a), \\ \varphi_0 &= 2x_1/(3r_0), & \Delta\ell &= x_2 - 2x_1/3, \\ F_{FD} &= c(x_2 - 2x_1/3) + k(\dot{x}_2 - 2\dot{x}_1/3), & F_F &= -cx_2. \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen lauten somit

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= S - R_1 - m_1 g \sin\alpha, \\ I_1\ddot{x}_1/(3a) &= (3R_1 - S)a, \\ m_2\ddot{x}_2 &= -F_{FD} + F_F - R_2 + m_2 g \sin\alpha, \\ I_2\ddot{x}_2/(2a) &= 2aR_2, \\ I_0(2\ddot{x}_1/(3r_0)) &= (F_{FD} - S)r_0. \end{aligned}$$

Elimination von R_i und S liefert schließlich

$$\begin{aligned} \left(m_1 + I_1/(9a^2) + 4I_0/(9r_0^2)\right)\ddot{x}_1 &= 2F_{FD}/3 - m_1 g \sin\alpha, \\ (m_2 + I_2/(4a))\,\ddot{x}_2 &= -F_{FD} + F_F + m_2 g \sin\alpha. \end{aligned}$$