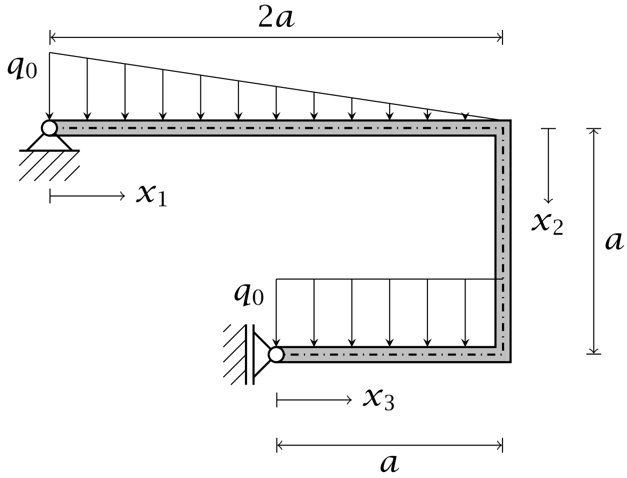
Auflösung der Klausurbeispiele vom Jänner 2018

1. **Rahmen**
   Ein Rahmen ist wie skizziert gelagert und durch eine Dreiecks- und eine Gleichlast vertikal belastet. Ermitteln Sie die Auflager- und (verallgemeinerten) Schnittkräfte.



Geg.: a, q_0;

Ges.: (a) Auflagerkräfte;
(b) $N(x_i)$, $Q(x_i)$, $M(x_i)$.

Hinweis: Fertigen Sie für jeden Abschnitt eine Skizze der verwendeten Koordinaten an and wählen Sie die Orientierung der Schnittkräfte geeignet!

Auflagerkräfte:

$$V_1 = 2q_0a, \qquad H_1 = -H_2 = -13aq_0/6.$$

Schnittkräfte:

Abschnitt	$N(x_i)$	$Q(x_i)$	$M(x_i)$
$0 \le x_1 \le 2a$	$-H_1$	$V_1 - q_0(x_1 - x_1^2/(4a))$	$V_1x_1 - q_0(x_1^2/2 - x_1^3/(12a))$
$0 \le x_2 \le a$	aq_0	H_1	$H_2(a - x_2) + q_0a^2/2$
$0 \le x_3 \le a$	$-H_2$	$-q_0x_3$	$-q_0x_3^2/2$

Man beachte, dass zufolge der gewählten Orientierung $M(x_2 = a) = -M(x_3 = a)$ gilt!

Biegelinie (nicht mehr Klausuraufgabe):

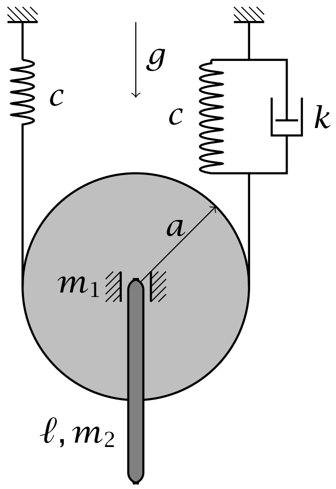
$$w_1(x_1) = c_1 + c_2x_1 - \frac{1}{EJ}\left(\frac{V_1x_1^3}{3} - \frac{q_0x_1^4}{24} - \frac{q_0x_1^5}{240a}\right),$$
$$w_2(x_2) = c_3 + c_4x_2 - \frac{1}{EJ}\left(\frac{H_2(3a - x_2)x_2^2}{6} + \frac{q_0a^2x_2^2}{4}\right),$$
$$w_3(x_3) = c_5 + c_6x_3 + \frac{q_0x_3^4}{24EJ}.$$

Rand- und Übergangsbedingungen (unter Berücksichtigung der Schlankheit):

$$w_1(0) = 0, \qquad w_1'(2a) = w_2'(0), \qquad w_2(0) = 0,$$
$$w_2'(a) = w_3'(a) \qquad w_2(a) = 0, \qquad w_3(a) = w_1(2a).$$

2. **Seilrolle und Pendel**
   Eine homogene Kreisscheibe (Radius a, Masse m_1) ist wie skizziert visko-elastisch gelagert (Federsteifigkeit c, Dämpferkonstante k); an ihrer Achse ist ein homogenes Pendel (Masse m_2, Länge ℓ) starr befestigt.

   Gesucht sind die Bewegungsgleichungen nach **Lagrange**.



Geg.: a, ℓ, m_1, m_2, c, k, Erdbeschleunigung g;

Ges.: (a) Freiheitsgrade;

(b) Bewegungsgleichungen nach **Lagrange**;

Annahmen: reines Rollen, Federn sind in der gezeichneten Lage entspannt. Das Pendel ist starr mit der Scheibe verbunden.

Die Scheibe besitzt die zwei Freiheitsgrade y (Verschiebung der Achse nach oben) und φ (Rotation gegen den Uhrzeigersinn).

Die Position (relativ zur gezeichneten Lage der Scheibenachse) und Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts des Pendels lauten also

$$\boldsymbol{r}_P = \begin{pmatrix} \ell \sin(\varphi)/2 \\ y - \ell\cos(\varphi)/2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_P = \begin{pmatrix} \ell\cos(\varphi)\dot\varphi/2 \\ \dot y + \ell\sin(\varphi)\dot\varphi/2 \end{pmatrix}.$$

Damit lautet die kinetische Energie

$$T = \frac{m_1 \dot y^2}{2} + \frac{m_1 a^2 \dot\varphi^2}{4} + \frac{m_2(\dot y^2 + \dot y \ell \sin(\varphi)\dot\varphi + \ell^2\dot\varphi^2/3)}{2}.$$

Gewichtspotential:

$$W = m_1 g y + m_2 g(y - \ell\cos(\varphi)/2).$$

Die Längenänderungen der Federn lauten

$$\Delta\ell_L = -y + a\varphi, \qquad \Delta\ell_R = -y - a\varphi.$$

Daraus ergibt sich

$$U = \frac{c}{2}((\Delta\ell_L)^2 + (\Delta\ell_R)^2) = c(y^2 + a^2\varphi^2)$$

und

$$\delta A = -k(\Delta\dot\ell_R)\delta(\Delta\ell_R) = -k(\dot y + a\dot\varphi)(\delta y + a\delta\varphi) \Rightarrow Q_y = -k(\dot y + a\dot\varphi), \quad Q_\varphi = -ak(\dot y + a\dot\varphi).$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot y} &= m_1\dot y + m_2(\dot y + \ell\sin\varphi\dot\varphi/2), \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot y} &= m_1\ddot y + m_2(\ddot y + \ell(\sin(\varphi)\ddot\varphi + \cos(\varphi)\dot\varphi^2)/2), \\
\frac{\partial T}{\partial y} &= 0, \\
\frac{\partial V}{\partial y} &= (m_1 + m_2)g + 2cy, \\
\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} &= \frac{m_1 a^2\dot\varphi}{2} + \frac{m_2(\dot y\ell\sin(\varphi) + 2\ell^2\dot\varphi/3)}{2}, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} &= \frac{m_1 a^2\ddot\varphi}{2} + \frac{m_2(\ell(\ddot y\sin(\varphi) + \dot y\cos(\varphi)\dot\varphi) + 2\ell^2\ddot\varphi/3)}{2}, \\
\frac{\partial T}{\partial \varphi} &= \frac{m_2\ell\dot y\cos(\varphi)\dot\varphi}{2}, \\
\frac{\partial V}{\partial \varphi} &= m_2 g\ell\sin(\varphi)/2 + 2a^2 c\varphi.
\end{aligned}$$