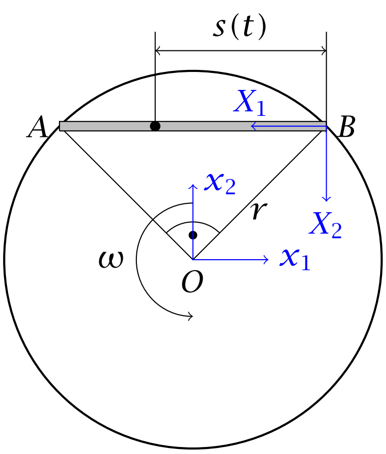
Alte Klausurbeispiele

1. **Rotierende Kreisscheibe**
   Eine Kreisscheibe mit dem Radius r rotiert in der eigenen Ebene um ihre Achse O mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω. Durch die Scheibe verläuft ein Schlitz, siehe Skizze, $\angle AOB$ ist ein rechter Winkel. In diesem Schlitz bewegt sich eine Masse, ihr Abstand s vom Punkt B ändert sich über die Zeit wie

$$s(t) = \beta(1 - \cos\omega t).$$

Man ermittle die Geschwindigkeit und die Beschleunigung der Masse.



(a) Führen Sie ein geeignetes kartesisches oder polares Koordinatensystem ein.

(b) Berechnen Sie in diesem Koordinatensystem den Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}(t)$ der Masse.

(c) Berechnen Sie den absoluten Wert (Betrag) der Geschwindigkeit $v(t) = |\boldsymbol{v}|$.

(d) Berechnen Sie in diesem Koordinatenystem den Beschleunigungsvektor $\boldsymbol{a}(t)$ der Masse.

(e) Berechnen Sie den absoluten Wert (Betrag) der Beschleunigung $a(t) = |\boldsymbol{a}|$.

Lösungshinweise: Als Koordinatensystem kann das raumfeste System (x_1, x_2) mit dem Ursprung in 0, und das mitrotierende System im Punkt B mit den Koordinaten (X_1, X_2) verwendet werden. Damit erhalten wir in körperfesten Koordinaten

$$\boldsymbol{R} = s(t)\boldsymbol{e}_1, \quad \dot{\boldsymbol{R}} = \dot{s}\boldsymbol{e}_1 = \beta\omega\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_1, \quad \ddot{\boldsymbol{R}} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_1 = -\beta\omega^2\cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1.$$

Mit dem Winkel $\varphi = \pi/4 + \omega t$ gilt

$$\boldsymbol{r}_B = r(\cos\varphi, \sin\varphi)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{v}_B = r\omega(-\sin\varphi, \cos\varphi)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{a}_B = -r\omega^2(\cos\varphi, \sin\varphi)^{\mathrm{T}}.$$

Die Orientierung der körperfesten $\boldsymbol{e}_1$-Achse im Raum ist durch

$$\boldsymbol{b}_1 = \mathbf{R}_3(\pi + \omega t)\boldsymbol{e}_1 = (-\cos(\omega t), -\sin(\omega t)^{\mathrm{T}}$$

gegeben, sodass die Position der Masse im Raum

$$\boldsymbol{r}_m = \boldsymbol{r}_B + s(t)\boldsymbol{b}_1$$

lautet. Mit $\dot{\boldsymbol{b}}_1 = \omega\boldsymbol{b}_2 = \omega(\sin(\omega t), -\cos(\omega t))^{\mathrm{T}}$ und $\ddot{\boldsymbol{b}}_1 = -\omega^2\boldsymbol{b}_1$ gilt nun

$$\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{v}_B + \dot{s}\boldsymbol{b}_1 + s\omega\boldsymbol{b}_2 = r\omega\begin{pmatrix}-\sin(\pi/4 + \omega t)\\ \cos(\pi/4 + \omega t)\end{pmatrix} + \dot{s}\begin{pmatrix}-\cos(\omega t)\\ -\sin(\omega t)\end{pmatrix} + s\omega\begin{pmatrix}\sin(\omega t)\\ -\cos(\omega t)\end{pmatrix}.$$

Zerlegt man $\boldsymbol{v}_b$ in die körperfeste Basis $\boldsymbol{v}_B = r\omega(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2)/\sqrt{2}$, so erhalten wir

$$\boldsymbol{v}_m = (\dot{s} + r\omega/\sqrt{2})\boldsymbol{b}_1 + (s - r/\sqrt{2})\omega\boldsymbol{b}_2.$$

Wegen der Orthogonalität der Basisvektoren $\boldsymbol{b}_i$ gilt

$$|\boldsymbol{v}_M| = \sqrt{(\dot{s} + r\omega/\sqrt{2})^2 + (s - r/\sqrt{2})^2\omega^2}.$$

Für die Beschleunigung erhalten wir durch einfaches Ausdifferenzieren

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_m &= \ddot{s}\boldsymbol{b}_1 + \dot{s}\omega\boldsymbol{b}_2 + \omega(\dot{s} + r\omega/\sqrt{2})\boldsymbol{b}_2 - \omega^2(s - r/\sqrt{2})\boldsymbol{b}_1\\ &= \left(\ddot{s} - \omega^2(s - r\sqrt{2})\right)\boldsymbol{b}_1 + \omega(2\dot{s} + r\omega/\sqrt{2})\boldsymbol{b}_2.\end{aligned}$$

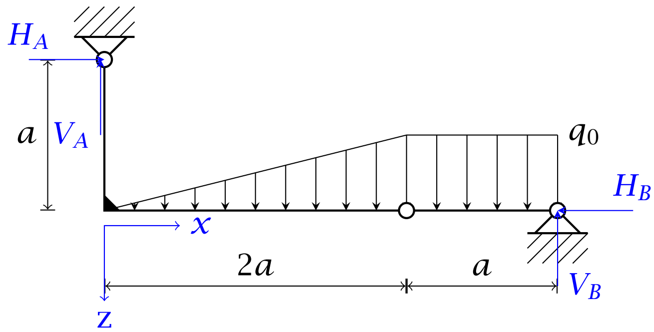
Natürlich lässt sich dieses Resultat auch über die Zerlegung der Beschleunigungsterme erzielen:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_f &= \boldsymbol{a}_B - \omega^2 \boldsymbol{r}_{mB} = \omega^2 r(\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2)/\sqrt{2} - \omega^2 s \boldsymbol{b}_1,\\
\boldsymbol{a}_C &= 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{s}\boldsymbol{b}_1 = 2\omega\dot{s}\boldsymbol{b}_2,\\
\boldsymbol{a}_R &= \ddot{s}\boldsymbol{b}_1.
\end{aligned}$$

Für den Betrag der Beschleunigung gilt schließlich

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\left(\ddot{s} - \omega^2(s - r\sqrt{2})\right)^2 + \omega^2\left(2\dot{s} + r\omega/\sqrt{2}\right)^2}.$$

2. **Rahmen mit verteilter Last**
Ein Rahmen mit den gegebenen Abmessungen und einem Gelenk bei $x = 2a$ ist wie skizziert gelagert und wird im horizontalen Abschnitt $[0, 2a]$ durch eine Dreieckslast, im Abschnitt $[2a, 3a]$ durch eine Gleichlast beansprucht. Man ermittle die Auflagerkräfte und die (verallgemeinerten) Schnittkräfte in den horizontalen Abschnitten.



Geg.: a, q_0;

Ges.: (a) Auflagerkräfte;

(b) (Verallgemeinerter) Schnittkraftverlauf im Abschnitt $x \in [0, 2a]$

(c) (Verallgemeinerter) Schnittkraftverlauf im Abschnitt $x \in [2a, 3a]$.

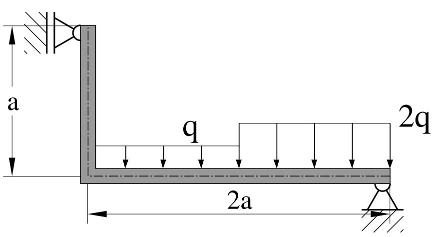
Lösungshinweise: Für die Auflagerkräfte ergibt sich

$$V_B = q_0 a/2, \quad V_a = 3q_0 a/2, \quad H_A = H_B = -7aq_0/3.$$

Schnittkräfte

Bereich	$N(x)$	$Q(x)$	$M(x)$
$0 < x < 2a$	$-H_A$	$V_A - q_0 x^2/(4a)$	$aH_A + xV_A - q_0 x^3/(12a)$,
$2a < x < 3a$	$-H_A$	$q_0(a/2 - (x - 2a))$	$q_0(x - 2a)(3a - x)/2$

3. **Rahmen**



Ein Rahmen ist wie skizziert gelagert und wird durch eine Gleichlast q bzw. $2q$ im *Riegel* (horizontaler Balken) belastet. Man ermittle die Auflager- und (verallgemeinerten) Schnittkräfte im Rahmen.

Geg.: a, q;

Ges.: (a) Auflagerkräfte;

(b) $N(x_i)$, $Q(x_i)$, $M(x_i)$ im *Rahmen* mit **Skizze des Verlaufs.**

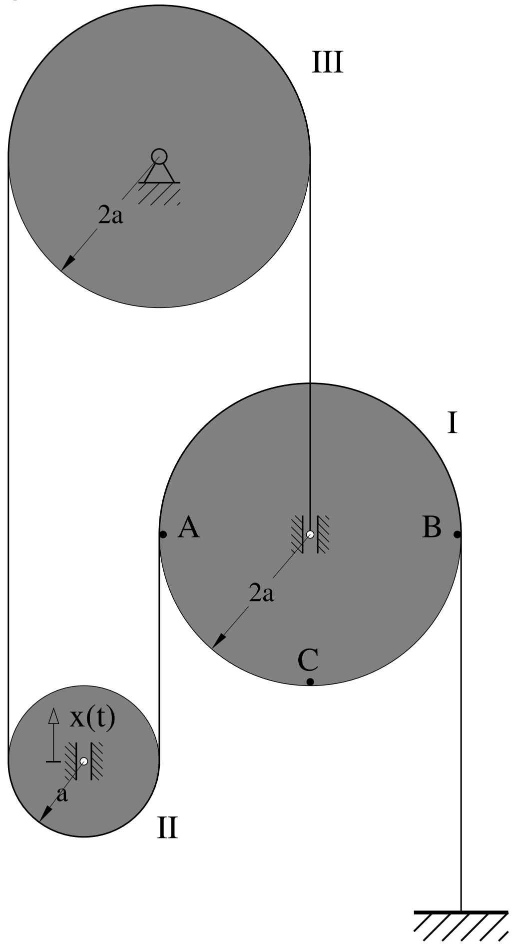
Lösungshinweise: Die Auflagerkräfte ergeben sich zu

$$H_A = H_B = 5aq/2, \quad V_B = 3aq.$$

Die Schnittkräfte lauten (x_1 im vertikalen Teil, x_2 im horizontalen)

Bereich	$N(x_i)$	$Q_z(x_i)$	$M(x_i)$
$0 < x_1 < a$	0	H_A	$H_A x_1$
$0 < x_2 < a$	$-H_A$	$-qx_2$	$H_A a - qx_2^2/2$
$a < x_2 < 2a$	$-H_A$	$-qa - 2q(x_2 - a)$	$H_a a - qx_2^2/2 - q(x_2 - a)^2/2.$

4. **Seilrollen**



Ein undehnbares Seil wird gemäß Skizze über 3 Rollen (Radien $2a$, a, $2a$) geführt und an der Achse der Rolle I fixiert. Die zwei Rollen I und II sind vertikal verschiebbar, die Rolle III fest gelagert. Die vertikale Position der Achse der Rolle II sei durch $x(t)$ bestimmt. Man ermittle die Winkelgeschwindigkeiten im Modell und speziell den Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand der Rolle I.

Geg.: a, $x(t)$;

Ges.: (a) $\boldsymbol{v}_M$, $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_C$;

(b) $\boldsymbol{a}_M$, $\boldsymbol{a}_A$, $\boldsymbol{a}_B$, $\boldsymbol{a}_C$;

(c) $\boldsymbol{a}_M$ und $\boldsymbol{a}_C$ für $x(t) = c\,t$.

(d) Winkelgeschwindigkeiten der 3 Rollen.

Lösungshinweise: Sei $\boldsymbol{v}_M = v_m \boldsymbol{e}_z$ die Geschwindigkeit der Walze I und $\boldsymbol{v}_{A'}$ und $\boldsymbol{v}_{B'}$ die Geschwindigkeit der linken und rechten Scheitelpunkte der Rolle II, dann folgt aus $\boldsymbol{v}_{A'} = -v_m \boldsymbol{e}_z$ und $\boldsymbol{v}_{B'} = \boldsymbol{v}_A = 2\boldsymbol{v}_M$, dass $v_m = 2\dot{x}$ gilt.

Damit folgt mit $\boldsymbol{\omega}_I = \omega_I \boldsymbol{e}_y$ auch $\omega_I = 2\dot{x}/(2a) = \dot{x}/a$ (warum?). Die restlichen Rechnungen sind Routine, zum Beispiel

$$\boldsymbol{v}_C = 2\dot{x}(\boldsymbol{e}_z - \boldsymbol{e}_x), \quad \boldsymbol{a}_C = 2\ddot{x}(\boldsymbol{e}_z - \boldsymbol{e}_x) + 2\dot{x}^2/a\,\boldsymbol{e}_z.$$

Die Winkelgeschwindigkeit der Rolle II ergibt sich zu $\omega_{II} = -3\dot{x}/(2a)$.