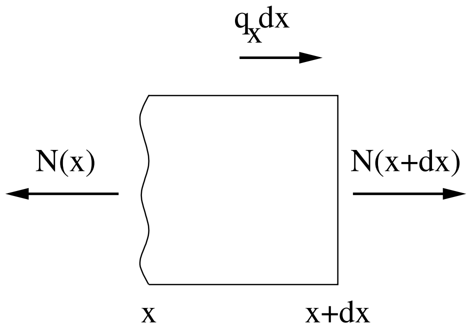
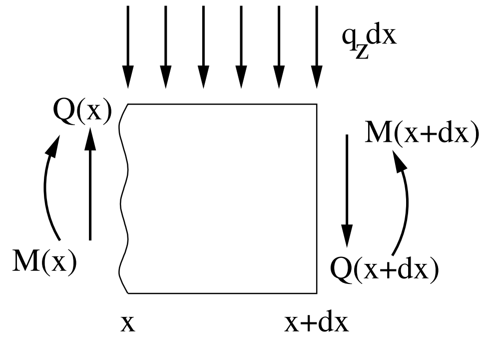
Ergänzung: Differentialgleichungen für Schnittkräfte

Wir betrachten einen Balken, dessen Achse entlang der x-Achse orientiert ist, und der durch verteilte Lasten $q_x(x)$ in axialer Richtung bzw. $q_z(x)$ in transversaler Richtung beansprucht wird.

Wir betrachten jeweils ein infinitesimal kleines Intervall $[x, x + dx]$. In diesem Intervall setzen wir voraus, dass $q_x(x)$ und $q_z(x)$ stetig sind; ihre Resultierende im Intervall $[x, x + dx]$ können wir daher durch $q_x(x)dx$ bzw. $q_z(x)dx$ approximieren.





Differentialgleichung für die Normalkraft $N(x)$

Kräftegleichgewicht in axialer Richtung liefert die Differenzengleichung

$$N(x + dx) - N(x) + \int_x^{x+dx} q_x(\xi) d\xi = 0.$$

Entwicklung von $N(x + dx)$ in eine Taylorreihe, Approximation des Integrals durch $q_x(x)\,dx$, Division durch dx und Grenzübergang $dx \searrow 0$ liefert

$$N'(x) = -q_x(x).$$

Bei bekanntem Verlauf von $q_x(x)$ ist die Normalkraft durch eine Stammfunktion von $-q_x(x)$ gegeben, wobei die Integrationskonstante bei statisch bestimmten Systemen aus den Randbedingungen ermittelt wird.

Differentialgleichung für die Querkraft $Q(x) := Q_z(x)$ und das Biegemoment $M(x) := M_y(x)$

Kräftegleichgewicht in z-Richtung liefert die Differenzengleichung

$$Q(x + dx) - Q(x) + \int_x^{x+dx} q_z(\xi) d\xi = 0.$$

Entwicklung von $Q(x + dx)$ in eine Taylorreihe, Approximation des Integrals durch $q_z(x)\,dx$. Division durch dx und Grenzübergang $dx \searrow 0$ liefert

$$Q'(x) = -q_z(x).$$

Bei bekanntem Verlauf von $q_z(x)$ ist die Querkraftkraft durch eine Stammfunktion von $-q_z(x)$ gegeben, wobei die Integrationskonstante bei statisch bestimmten Systemen aus den Randbedingungen ermittelt wird.

Das Momentengleichgewicht um die Stelle $x + dx$ liefert in linearer Näherung (die verteilte Last $q_z(x)$ liefert einen Beitrag $O(dx^2)$)

$$M(x + dx) - M(x) - Q(x)dx.$$

Taylorreihenentwicklung, Division durch dx und Grenzübergang $dx \searrow 0$ ergibt

$$M'(x) = Q(x).$$

Bemerkungen

- Bei unstetigen Belastungen (Einzelkräften, Unstetigkeiten in $q(x)$) muß das Intervall in entsprechend viele Teilintervalle geteilt werden. Für diesen Fall haben sich in der Technischen Mechanik die „Föppl-Symbole“[1] (bzw. „Föppl-Klammern“) als sehr praktisch erwiesen:

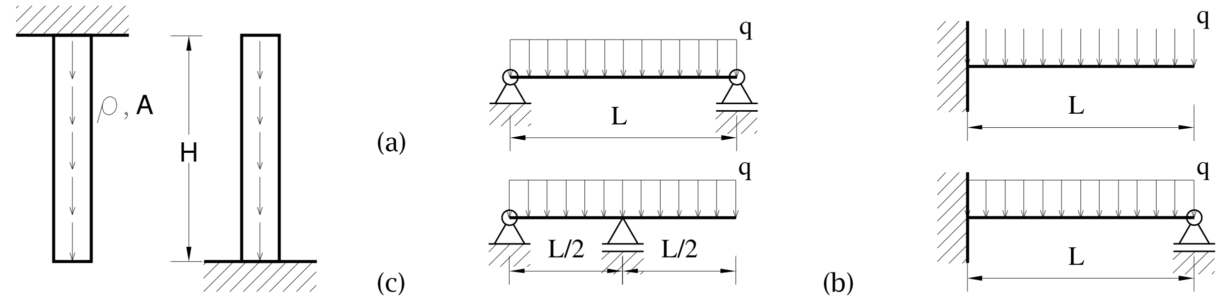
$$\langle x - x_0 \rangle^k = \begin{cases} (x - x_0)^k & \text{für } x \geq x_0, \\ 0 & \text{für } x < x_0. \end{cases}$$

[1] August Otto Föppl (1854 – 1924)

- Für einfache Belastungsfälle (zB. konstante verteile Last) ist es öfters effizienter, die Schnittgrößen aus den „globalen“ Gleichgewichtsbedingungen zu ermitteln.
- Auch durch geschickte Wahl der Integrationsrichtung lässt sich gelegentlich viel unnötige Rechenarbeit sparen.

Übungsbeispiele für die Berechnung von Schnittgrößen

Die folgenden Beispiele zeigen jeweils homogene Balken der Länge L (bzw. Höhe H), die durch ihr Eigengewicht ($q = \rho * g * A$) belastet sind. Ermitteln Sie – soweit möglich – die Schnittgrößen!

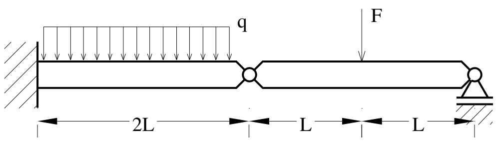


Axiale Belastung Transversale Belastung

Zitat aus „Keine Panik vor Mechanik. Erfolg und Spaß im klassischen ‚Loser-Fach‘ des Ingenieurstudiums“ von Oliver Romberg und Nikolaus Hinrichs:

> Bevor wir irgend eine weitere Überlegung anstellen, zeichnen wir ein Freikörperbild. Wir zeichnen zuerst ein vernünftiges Freikörperbild, bevor wir versuchen, die Lagerreaktionen zu berechnen. Am Anfang der Lösung einer Statik-Aufgabe zeichnet man ein Freikörperbild. Zu allererst schneiden wir das System frei! Wir zeichnen ein Freikörperbild. Noch bevor wir die Aufgabe überhaupt richtig verstanden haben! Als erstes zeichnen wir ein Freikörperbild. Wir zeichnen also am Anfang eines jeden Statik-Problems ein richtiges Freikörperbild. Wir schneiden zuerst mal frei. Freischneiden - das Allerwichtigste ....

Die folgenden Beispiele zeigen jeweils homogene Balken, die durch eine Gleichlast q und/oder eine Kraft F belastet sind. Ermitteln Sie die Schnittgrößen!

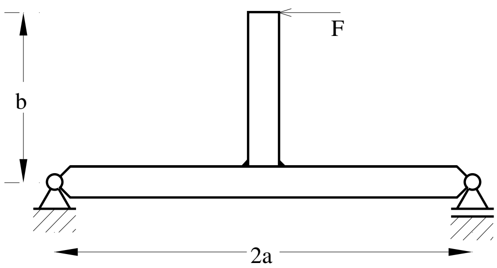


Auflagerkräfte:

$$V_1 = 2qL + F/2, \quad H_1 = 0, \quad M_e = -FL - 2qL^2, \quad V_2 = F/2.$$

Schnittkräfte

Bereich	$Q(x)$	$M(x)$
$x < 2L$	$V_1 - qx$	$M_e + V_1 x - qx^2/2$
$2L < x < 3L$	$F/2$	$F(x - 2L)/2$
$3L < x$	$-F/2$	$F(4L - x)/2$

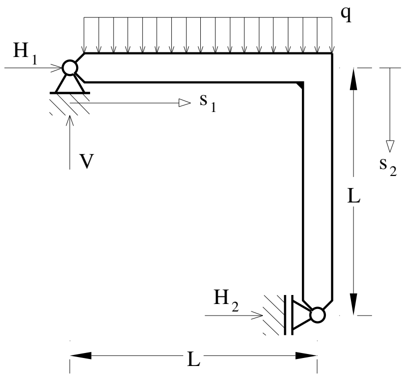


Auflager:

$$V_1 = -V_2 = bF/(2a), \qquad H_1 = F.$$

Schnittkräfte:

Bereich	$N(x_i)$	$Q(x_i)$	$M(x_i)$
$x_1 < a$	$-F$	V_1	$V_1 x_1$
$x_1 > a$	0	V_1	$V_1(x_1 - 2a)$
$x_2 < b$	0	$-F$	$F(b - x_2)$



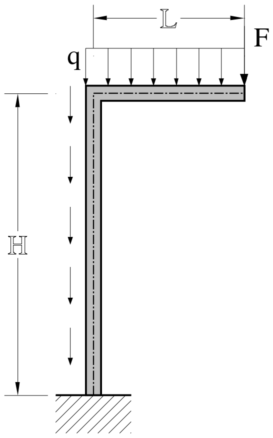
Auflagerkräfte:

$$V = q * L, \quad H_2 = q * L/2, \quad H_1 = -H_2.$$

Schnittkräfte:

$$\begin{aligned} N_x(s_1) &= q * L/2, & N_z(s_2) &= 0, \\ Q_z(s_1) &= q * (L - s_1), & Q_x(s_2) &= q * L/2, \\ M_y(s_1) &= q * s_1 * (L - s_1/2) & M_y(s_2) &= q * L/2 * (L - s_2). \end{aligned}$$

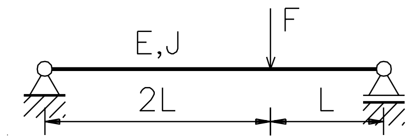
„Klausurbeispiel 1997“



Ein Winkelträger (Höhe H, Länge L) ist durch eine vertikale Last F am freien Ende und sein Eigengewicht q belastet. Man ermittle die (verallgemeinerten) Schnittkräfte.

Geg : H, L, q, F;

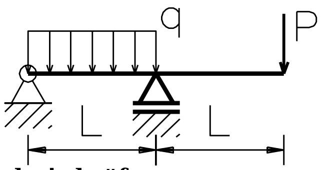
Ges.:
1. Auflagerkräfte,
2. Normalkraft-, Querkraft- und Momentverlauf mit **Skizze!**.



Aufgabe der 2. Klausur WS 1994/95
Querkraft und Momentverlauf:

$$\begin{aligned} x < 2L: &\quad Q = F/3, \quad M = Fx/3, \\ X > 2L: &\quad Q = -2F/3, \quad M = 2F(L - x/3). \end{aligned}$$

Beispiel:



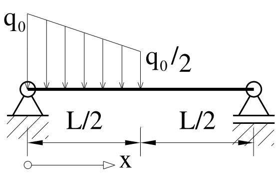
Auflager:

$$V_1 = q * L/2 - P, \quad V_2 = q * L/2 + 2P$$

Schnittkräfte:

$$x < L: \quad \begin{aligned} Q_z(x) &= V_1 - q * x, \\ M_y(x) &= V_1 * x - q * x^2/2, \end{aligned} \qquad x > L: \quad \begin{aligned} Q_z(x) &= P, \\ M_y(x) &= P * (x - 2L), \end{aligned}$$

Beispiel:



Verlauf der Belastung:

$$q(x) = \begin{cases} q_0 * (1 - x/L), & \text{für } x < L/2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Auflagerkräfte sind $A = 7q_0L/24$ (linkes Auflager) und $B = q_0L/12$ (rechtes Auflager).

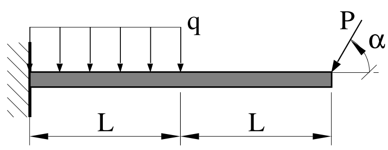
Damit erhalten wir den Schnittkraftverlauf

$$Q(x) = \begin{cases} A - q_0 * (x - x^2/(2L)) & \text{für } x \le L/2, \\ A - 3q_0 * L/8 = -B & \text{sonst.} \end{cases}$$
$$M(x) = \begin{cases} Ax - q_0 * (x^2/2 - x^3/(6L)) & \text{für } x \le L/2, \\ B * (L - x) = q_0 * L * (L - x)/12 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Stellen Sie den Momentverlauf graphisch dar!

Klausurbeispiel Dezember 2002

Kragbalken
Ein Balken der Länge $2L$ ist gemäß Skizze an der Stelle $x = 0$ eingespannt und wird im Abschnitt $x \in [0, L]$ durch eine Gleichlast q und am rechten Ende $x = 2L$ durch eine Einzelkraft P belastet. Man ermittle die Auflager- und Schnittkräfte des Systems.

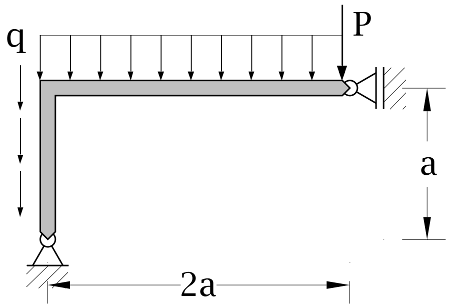


Geg : Länge L, verteilte Last $q(t) = q$, Einzelkraft P, α;

Ges.:
1. Auflagerkräfte,
2. Schnittkräfte $N(x)$, $Q(x)$ und $M(x)$ mit **Skizze** (!).

Klausurbeispiel Nov. 2005: Winkelträger

Ein Winkelträger mit konstantem Querschnitt ist gemäß Skizze gelagert und durch sein Eigengewicht q und eine vertikale Last P am rechten Ende belastet. Ermitteln Sie die (verallgemeinerten) Auflager- und Schnittkräfte.



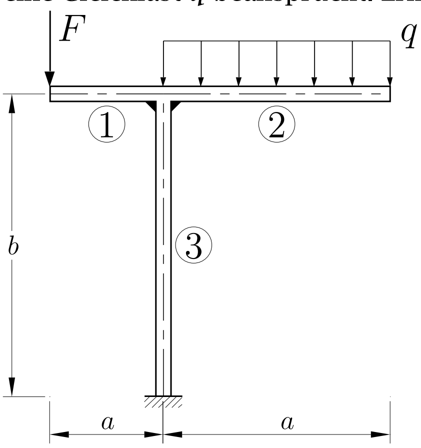
Geg : Länge a, verteilte Last q, Einzellast P;

Ges.:
1. Auflagerkräfte,
2. Verlauf der Schnittkräfte N, Q und M mit **Skizze** (!).

Hinweis: Legen Sie passende Koordinatensysteme fest.

Klausurbeispiel 30. 11. 2007: Träger

Ein vertikaler Träger der Länge b ist gemäß Skizze am Boden fest eingespannt und am oberen Ende mit einem horizontalen Balken der Länge $3a$ fest verbunden. Der horizontale Balken wird durch eine Einzelkraft F und eine Gleichlast q beansprucht. Ermitteln Sie die (verallgemeinerten) Auflager- und Schnittkräfte des Trägers.



Geg.: Längen a, b, Einzelkraft F, verteilte Last q;

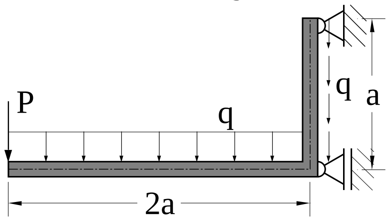
Ges.:

1. (Verallgemeinerte) Auflagerkräfte,
2. (Verallgemeinerte) Schnittkräfte in den Abschnitten ①, ②, ③.

Hinweis: Wählen Sie passende Koordinatensysteme!

Klausurbeispiel 27. 11. 2009: Rahmen

Ein Rahmen wird wie skizziert am oberen Ende durch ein Festlager, am unteren Ende durch ein Loslager gestützt. Dieser Rahmen wird durch sein Eigengewicht (q) und eine Einzelkraft P am freien Ende belastet. Man ermittle die (verallgemeinerten) Auflager- und Schnittkräfte.



Geg.: a, q, P;

Ges.:
1. Auflagerkräfte;
2. $N(x)$, $Q(x)$, $M(x)$ mit **Skizze**.