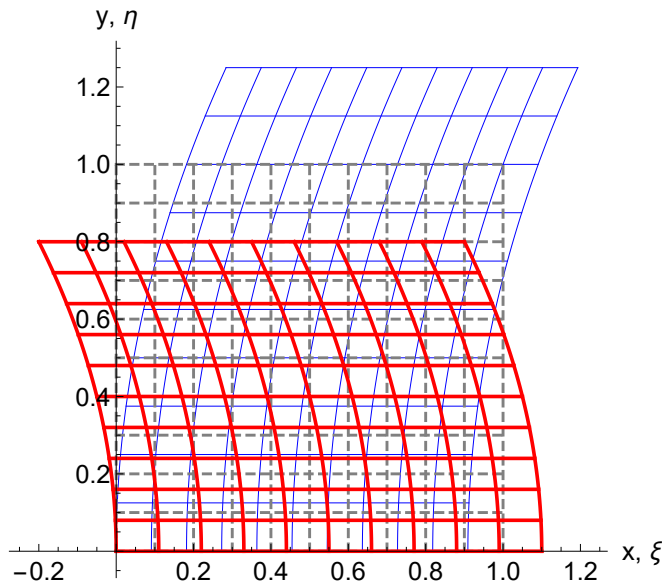


## Übungsbeispiel für den ebenen Verzerrungszustand



Gegeben seien die durch

$$\begin{aligned}x &= 1.1\xi - 0.2\eta^2, \\y &= 0.8\eta\end{aligned}$$

beschriebenen ebenen ( $w = 0$ , bzw.  $z = \zeta$ ) Verformungen eines Körpers. In der Abbildung ist die Verformung des ursprünglich grauen Einheitsquadrats rot gezeichnet, das Urbild des Einheitsquadrats blau. Man bestimme für diese Verformung

- Die Verschiebungsvektoren in Lagrangescher und Eulerscher Beschreibung,
- den Greenschen und Almansischen Verzerrungstensor.

### Greenscher VT

Die Verschiebungen als Funktion der Körperkoordinaten ( $\xi, \eta$ ) lauten

$$\begin{aligned}u_1 &= 0.1\xi - 0.2\eta^2, \\u_2 &= -0.2\eta.\end{aligned}$$

Für den Verschiebungsgradiententensor ergibt sich daraus

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.4\eta \\ 0 & -0.2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} (\mathbf{U} + \mathbf{U}^T + \mathbf{U}^T \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.2\eta \\ -0.2\eta & -0.2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.005 & -0.02\eta \\ -0.02\eta & 0.08\eta^2 + 0.02 \end{pmatrix}$$

### Almansischer VT

Im ersten Schritt muss die Verschiebung durch die Raumkoordinaten ( $x, y$ ) ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}\xi &= x/1.1 + 25y^2/88, & u_1 &= x - \xi = (1 - 1/1.1)x - 25y^2/88, \\ \eta &= 1.25y, & u_2 &= y - \eta = -y/4,\end{aligned}$$

und

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} & -\frac{25y}{44} \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{U} + \mathbf{U}^T - \mathbf{U}^T \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} & -\frac{25y}{88} \\ -\frac{25y}{88} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{242} & -\frac{25y}{968} \\ -\frac{25y}{968} & \frac{1}{32} + \frac{968}{625y^2} \end{pmatrix}$$

An der Stelle  $(\xi, \eta) = (0.5, 0.5)$  lautet der Greensche Verzerrungstensor

$$\mathbf{G}(0.5, 0.5) = \begin{pmatrix} 0.105 & -0.11 \\ -0.11 & -0.16 \end{pmatrix}.$$

An der entsprechenden Stelle  $(x, y) = (0.5, 0.4)$  ergibt sich der Almansische VT zu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{21}{242} & -\frac{25}{242} \\ -\frac{25}{242} & -\frac{1189}{3872} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.0867769 & -0.103306 \\ -0.103306 & -0.307076 \end{pmatrix}.$$