Punktbewegung entlang einer Spirale

Wir betrachten eine Punktmasse, die sich entlang einer Spirale[a] mit vertikaler Achse bewegt. Die Spirale besitze die Parameterdarstellung

$$\boldsymbol{r}(\lambda) = (a\cos\lambda, a\sin\lambda, b\,\lambda)^T.$$

Wegen

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\left(\frac{dr_1}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dr_2}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dr_3}{d\lambda}\right)^2}\, d\lambda \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\, d\lambda \end{aligned}$$

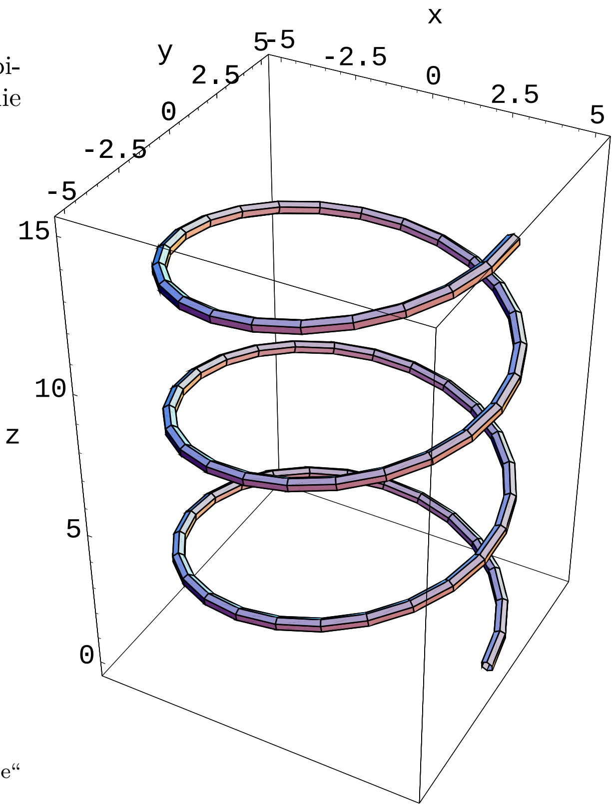
ergibt sich $s = \sqrt{a^2+b^2}\lambda$ und der *Tangentenvektor*

$$\boldsymbol{t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = (-a\sin\lambda, a\cos\lambda, b)^T/\sqrt{a^2+b^2}.$$

Für den *Hauptnormalenvektor* $\boldsymbol{n}$ erhalten wir nun

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} &= \rho(-a\cos\lambda, -a\sin\lambda, 0)^T/(a^2+b^2) \\ &= \rho\frac{a}{a^2+b^2}(-\cos\lambda, -\sin\lambda, 0). \end{aligned}$$

[a] Gemäß Wikipedia sollte man diese Kurve besser „Schraubenlinie“ nennen.



Der *Krümmungsradius* ρ ist also $(a^2+b^2)/a$ und der *Binormalvektor* $\boldsymbol{m}$ ergibt sich zu

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n} = (b\sin\lambda, -b\cos\lambda, a)/\sqrt{a^2+b^2}.$$

Wir betrachten nun 2 Spezialfälle:

Fall 1: Konstante Bahngeschwindigkeit Gilt $v = ds/dt \equiv c$, so erhalten wir $\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{a} = c\dot{\boldsymbol{t}} = c^2\boldsymbol{n}/\rho$.

Fall 2: Konservative Bewegung Gilt das Erhaltungsgesetz $H = v^2/2 + kz \equiv h$, so erhalten wir wegen $v = ds/dt = \sqrt{a^2+b^2}d\lambda/dt$ aus

$$\frac{(a^2+b^2)\dot{\lambda}^2}{2} + kb\lambda = h$$

die gewöhnliche autonome Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{\lambda} = \sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}\sqrt{h-kb\lambda}.$$

Diese besitzt die Gestalt $\dot{\lambda} = f(\lambda)$ und kann explizit gelöst werden:

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{d\lambda}{\sqrt{h-kb\lambda}} = \int_{t_0}^{t}\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}dt.$$

Es ergibt sich

$$\left.\frac{-2\sqrt{h-kb\lambda}}{kb}\right|_{\lambda_0}^{\lambda} = \sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}(t-t_0).$$

Quadrieren auf beiden Seiten und Einsetzen der Anfangsbedingungen $\lambda(t_0) = \lambda_0$, $\dot{\lambda}(t_0) = 0$ liefert

$$\frac{4kb(\lambda_0-\lambda)}{k^2b^2} = \frac{2}{a^2+b^2}(t-t_0)^2,$$

Tabelle 1: Tabelle des Griechischen Alphabets

A	α	Alpha	I	ι	Iota	P	ϱ, ρ	Rho
B	β	Beta	K	κ	Kappa	Σ	ς, σ	Sigma
Γ	γ	Gamma	Λ	λ	Lambda	T	τ	Tau
Δ	δ	Delta	M	μ	My	Υ	υ	Ypsilon
E	ε, ϵ	Epsilon	N	ν	Ny	Φ	φ, ϕ	Phi
Z	ζ	Zeta	Ξ	ξ	Xi	X	χ	Chi
H	η	Eta	O	o	Omikron	Ψ	ψ	Psi
Θ	ϑ, θ	Theta	Π	π	Pi	Ω	ω	Omega

also

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{kb}{2(a^2+b^2)}(t-t_0)^2.$$

Daraus ergibt sich $v = \sqrt{a^2+b^2}\dot{\lambda} = -\frac{kb}{\sqrt{a^2+b^2}}(t-t_0)$ und $\dot{v} = -\frac{kb}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Einsetzen in die Formel

$$\boldsymbol{a} = \dot{v}\boldsymbol{t} + v^2\boldsymbol{n}/\varrho$$

liefert den Beschleunigungsvektor.

Die vorstehende Rechnung lässt sich durch den „Umweg“ über die Beschleunigungen drastisch vereinfachen: Mithilfe des Schwerpunktsatzes ergibt sich[1]

$$\ddot{s} = \sqrt{a^2+b^2}\ddot{\lambda} = -k\sin\alpha = \frac{-bk}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \ddot{\lambda} = -\bar{k} = \frac{-kb}{a^2+b^2},$$

woraus wir sofort die restlichen Terme erhalten:

$$\dot{\lambda}(t) = \dot{\lambda}(t_0) - \bar{k}t, \qquad \lambda(t) = \lambda_0 - \bar{k}t^2/2.$$

Es lässt sich leicht nachrechnen, dass damit das Erhaltungsgesetz erfüllt ist.

[1] Die Beschleunigung entlang der Spirale entspricht der Beschleunigung auf einer schiefen Ebene der Steigung α, wobei $\sin\alpha = b/(a^2+b^2)$ gilt. Ohne Rückgriff auf den Schwerpunktsatz ergibt sich die Bewegungsgleichung auch, wenn man das Erhaltungsgesetz $H = v^2/2 + kz \equiv h$ nach der Zeit differenziert und den Ausdruck durch $\dot{\lambda}$ dividiert.