Zentralkörperproblem

Ein Massenpunkt P mit der Masse m bewegt sich in der Ebene $z = 0$ so, dass seine Beschleunigung stets zu einem festen Punkt O, der als Koordinatenursprung gewählt wird, gerichtet ist, also $a_\varphi = 0$ ist. Daraus folgt unmittelbar das zweite Keplersche Gesetz („Flächensatz“)

$$r^2\omega = c.$$

Wir nehmen nun an, dass die Beschleunigung in radialer Richtung dem Gesetz $a_r = -k/(mr^2)$ folgt. Mit $\dot\varphi = \omega = c/r^2$ erhalten wir daraus die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot r - \frac{c^2}{r^3} + \frac{k}{mr^2} = 0 \tag{1}$$

für den Abstand r, die wieder die Gestalt $\ddot r + f(r) = 0$ besitzt.

„Standard-Lösungsmethode“

Wie üblich verwenden wir den Energiesatz mit der (modifizierten) kinetischen Energie $T = (\dot r)^2/2$ und der potentiellen Energie

$$V = \frac{c^2}{2r^2} - \frac{k}{mr}. \tag{2}$$

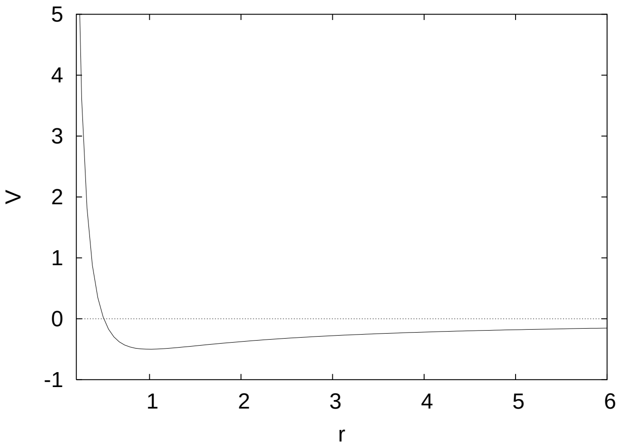
Aus dem Energiesatz folgt, dass die Gesamtenergie $E = T + V$ konstant ist:

$$\frac{\dot r^2}{2} + \frac{c^2}{2r^2} - \frac{k}{mr} = E, \quad \Rightarrow \dot r = \sqrt{2E + \frac{2k}{mr} - \frac{c^2}{r^2}}. \tag{3}$$

Daraus erhalten wir die Beziehung

$$\int_{r_0}^{r} \frac{d\varrho}{\sqrt{2E + \frac{2k}{m\varrho} - \frac{c^2}{\varrho^2}}} = t - t_0.$$

Potentielle Energie V für das Zentralkörperproblem für nicht verschwindende Werte von c und k: Für $r > mc^2/(2k)$ ist $V > 0$; für große r dominiert der Term $-k/mr$. Lösungen mit $E < 0$ sind beschränkt, während die Niveaulinien von E für $E \geq 0$ unbeschränkt sind.



Das Integral auf der linken Seite lässt sich zwar noch berechnen – für $-k^2/(2c^2m^2) < E < 0$ führt die Substitution

$$r = \frac{-k}{2Em^2} + \frac{\alpha\cos\vartheta}{\sqrt{2|E|}} \quad \text{mit } \alpha^2 = -c^2 - \frac{k^2}{2m^2E} > 0$$

zum Integral

$$\frac{\sqrt{2E(r + k/(2Em^2))^2 + \alpha^2}}{2E} + \frac{k}{2Em\sqrt{2|E|}}\vartheta = \frac{\alpha\sin\vartheta}{2E} + \frac{k}{2Em\sqrt{2|E|}}\vartheta,$$

dieser Ausdruck lässt sich jedoch im allgemeinen nicht mehr explizit nach ϑ auflösen.

Substitutionsmethode

Geometrisch anschaulichere Ergebnisse erhält man durch die folgenden Substitutionen: Anstelle von $r(t)$ berechnen wir die Funktion $u(\varphi) = 1/r$. Die neue unabhängige Variable ist also der Winkel φ. Wegen $d\varphi/dt = \omega = c/r^2 = cu^2$ ergibt sich mithilfe der Kettenregel

$$\frac{dr}{dt} = \left(\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{u}\right)\frac{d\varphi}{dt} = -cu',$$
$$\frac{d^2r}{dt^2} = -c\frac{d^2u}{d\varphi^2}\frac{d\varphi}{dt} = -c^2u^2u''.$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung (1) und Kürzen durch u^2 liefert dann die lineare Bewegungsgleichung

$$-c^2u'' - c^2u + k/m = 0,$$

die wir sofort als Einmassenschwingerproblem erkennen und lösen:

$$u = A\cos\varphi + B\sin\varphi + \frac{k}{c^2m}.$$

Durch passende Wahl des Anfangswinkels – der Radius r soll für $\varphi = 0$ einen Extremwert annehmen – kann $B = 0$ gewählt werden. Für r ergibt sich damit die Formel

$$r = \frac{1}{A\cos\varphi + k/c^2m} = \frac{c^2m}{k(1+\varepsilon\cos\varphi)} \tag{4}$$

mit der „numerischen Exzentrizität“ $\varepsilon = Amc^2/k$. Aus den Anfangsbedingungen $r(0) = r_0$ und $v(0) = r_0\omega$ folgt

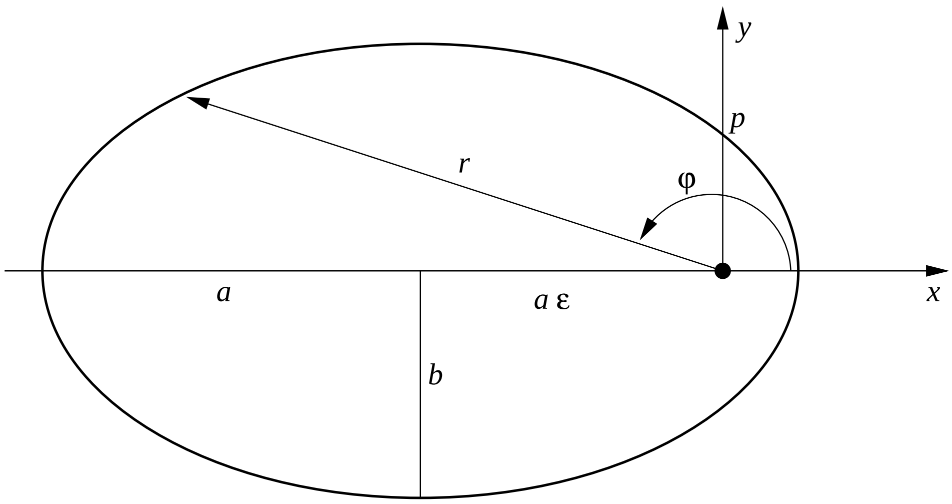


Abbildung 1: Die Ellipse als mögliche Bahnkurve ($\varepsilon < 1$) für das Keplerproblem

$c = r_0v_0$ und

$$\varepsilon = \frac{mr_0v_0^2}{k} - 1.$$

Für $\varepsilon = 0$, also für $v_0^2 = k/mr_0$, bewegt sich die Punktmasse auf einem Kreis mit Radius r_0; für $\varepsilon = 1$ bewegt sich der Massenpunkt entlang einer Parabel, für $\varepsilon > 1$ entlang einer Hyperbel.

Aus Abb. 1 können wir folgendermaßen den Zusammenhang mit Gleichung (4) herleiten:

- Aus der Bedingung *Die Summe der Abstände zu den Brennpunkten ist* $2a$ folgt zunächst

$$b^2 = a^2(1-\varepsilon^2).$$

- Für den speziellen Wert $\varphi = \pi/2$ ergibt sich mit derselben Methode

$$p^2 = a^2(1-\varepsilon^2)^2, \quad \text{bzw. } p = a(1-\varepsilon^2).$$

- Aus der Ellipsengleichung folgt nun mit $x = \varepsilon a + r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$

  $$(\varepsilon a + r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi/(1-\varepsilon^2) = a^2.$$

  Erweitern mit $(1-\varepsilon^2)$ und Zusammenfassen ergibt

  $$2\varepsilon ar\cos\varphi(1-\varepsilon^2) + r^2(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi) = p^2,$$

  bzw.

  $$2pr\varepsilon\cos\varphi + r^2(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi) = p^2. \tag{5}$$

  Auflösen der quadratischen Gleichung nach p ergibt schließlich den Zusammenhang

  $$p_{1,2} = r\varepsilon\cos\varphi \pm \sqrt{(r\varepsilon\cos\varphi)^2 + r^2(1-\varepsilon^2\cos^2\varphi)} = \pm r + r\varepsilon\cos\varphi. \tag{6}$$

  Für Ellipsen mit $\varepsilon < 1$ ist wegen $p = a(1-\varepsilon)^2 > 0$ nur die Lösung $p_1 > 0$ interessant.