Nachtrag zum Zentralkörperproblem

Zentralkörperproblem

Ein Massenpunkt P mit der Masse m bewegt sich in der Ebene $z = 0$ so, dass seine Beschleunigung stets zu einem festen Punkt O, der als Koordinatenursprung gewählt wird, gerichtet ist, also $a_\varphi = 0$ ist. Daraus folgt unmittelbar das zweite KEPLERsche Gesetz („Flächensatz“)

$$r^2\omega = c.$$

Wir nehmen nun an, dass die Beschleunigung in radialer Richtung dem Gesetz $a_r = -k/(r^2)$ folgt; in dieser Darstellung ist $k = Gm_z$ mit der Gravitationskonstanten G und der Masse des Zentralgestirns m_Z. Mit $\dot\varphi = \omega = c/r^2$ erhalten wir daraus die Differentialgleichung zweiter Ordnung für den Abstand r

$$\ddot r - \frac{c^2}{r^3} + \frac{k}{r^2} = 0, \tag{1}$$

die wieder die Gestalt $\ddot r + f(r) = 0$ besitzt. Nullsetzen von $\ddot r$ liefert die stationäre Lösung

$$r_0 = c^2/k,$$

die einer Kreisbahn entspricht. Aus der stationären Kreisfrequenz $\omega_0 = c/r_0^2 = k^2/c^3$ ergibt sich die Umlaufzeit für die Kreisbahn

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi c^3}{k^2} = \frac{2\pi(r_0k)^{3/2}}{k^2} = \frac{2\pi\sqrt{r_0^3}}{\sqrt{k}}.$$

Das Quadrat der Umlaufzeit ist gemäß dem 3. KEPLERschen Gesetz also proportional zur 3. Potenz des Radius. Darüber hinaus sieht man, dass wegen $k = Gm_z$ die Periode mit der Masse des Zentralgestirns fällt.

„Standard-Lösungsmethode“

Wie üblich verwenden wir den Energiesatz mit der (modifizierten) kinetischen Energie $T = (\dot r)^2/2$ und der potentiellen Energie

$$V = \frac{c^2}{2r^2} - \frac{k}{r}. \tag{2}$$

Aus dem Energiesatz folgt, dass die Gesamtenergie $E = T + V$ konstant ist:

$$\frac{\dot r^2}{2} + \frac{c^2}{2r^2} - \frac{k}{r} = E, \quad \Rightarrow \dot r = \sqrt{2E + \frac{2k}{r} - \frac{c^2}{r^2}}. \tag{3}$$

Daraus erhalten wir die Beziehung

$$\int_{r_0}^{r} \frac{d\varrho}{\sqrt{2E + \frac{2k}{\varrho} - \frac{c^2}{\varrho^2}}} = t - t0. \tag{4}$$

Das Integral auf der linken Seite lässt sich zwar noch berechnen, für $-k^2/(2c^2) < E < 0$ führt die Substitution

$$r = \frac{-k}{2E} + \frac{\alpha\cos\vartheta}{\sqrt{2|E|}} \quad \text{mit } \alpha^2 = -c^2 - \frac{k^2}{2E} > 0$$

zum Integral

$$\frac{\sqrt{2E(r + k/(2E))^2 + \alpha^2}}{2E} + \frac{k}{2E\sqrt{2|E|}}\vartheta = \frac{\alpha\sin\vartheta}{2E} + \frac{k}{2E\sqrt{2|E|}}\vartheta,$$

Gleichung (4) lässt sich jedoch im Allgemeinen nicht mehr explizit nach ϑ auflösen. Allerdings können wir wegen der Periodizität von $\sin\vartheta$ daraus die Periodendauer berechnen:

$$T = \frac{k\pi}{\sqrt{2|E^3|}}.$$

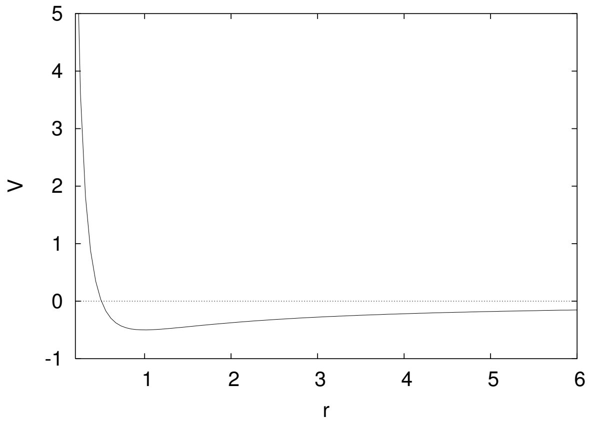

Abbildung 1: Potentielle Energie V für das Zentralkörperproblem für nicht verschwindende Werte von c und k: Für $r < c^2/(2k)$ ist $V > 0$; für große r dominiert der Term $-k/r$. Lösungen mit $E < 0$ sind beschränkt, während die Niveaulinien von E für $E \geq 0$ unbeschränkt sind.

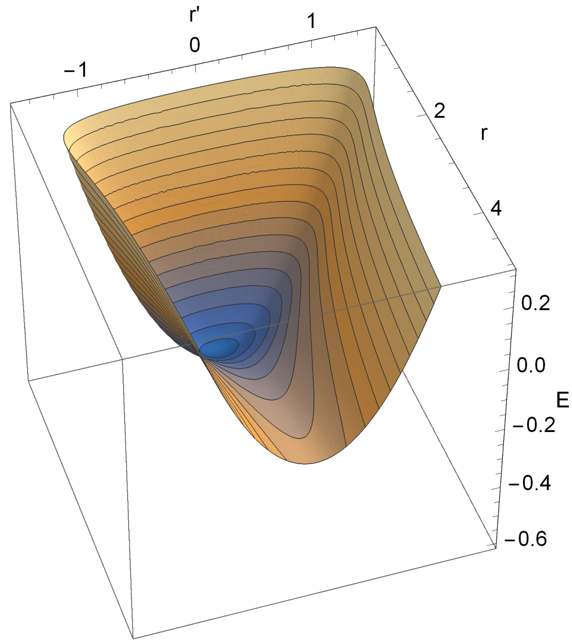

Abbildung 2: Energiefläche $E = \dot{r}^2/2 + V(r)$ mit Höhenschichtlinien.

Substitutionsmethode

Geometrisch anschaulichere Ergebnisse erhält man durch die folgenden Substitutionen: Anstelle von $r(t)$ berechnen wir die Funktion $u(\varphi) = 1/r$. Die neue unabhängige Variable ist also der Winkel φ. Wegen $d\varphi/dt = \omega = c/r^2 = cu^2$ ergibt sich mithilfe der Kettenregel

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{d\varphi}\frac{1}{u}\frac{d\varphi}{dt} = -cu',$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -c\frac{d^2u}{d\varphi^2}\frac{d\varphi}{dt} = -c^2u^2u''.$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung (1) und Kürzen durch u^2 liefert dann die lineare Bewegungsgleichung

$$-c^2u'' - c^2u + k = 0,$$

die wir sofort als Einmassenschwingerproblem erkennen und lösen:

$$u = A\cos\varphi + B\sin\varphi + \frac{k}{c^2}.$$

Durch passende Wahl des Anfangswinkels – der Radius r soll für $\varphi = 0$ einen Extremwert annehmen – kann $B = 0$ gewählt werden. Für r ergibt sich damit die Formel

$$r = \frac{1}{A\cos\varphi + k/c^2} = \frac{c^2}{k(1 + \varepsilon\cos\varphi)} \tag{5}$$

mit der „numerischen Exzentrizität“ $\varepsilon = Ac^2/k$. Aus den Anfangsbedingungen $r(0) = r_0$ und $v(0) = r_0\omega$ folgt $c = r_0v_0$ und

$$\varepsilon = \frac{r_0v_0^2}{k} - 1.$$

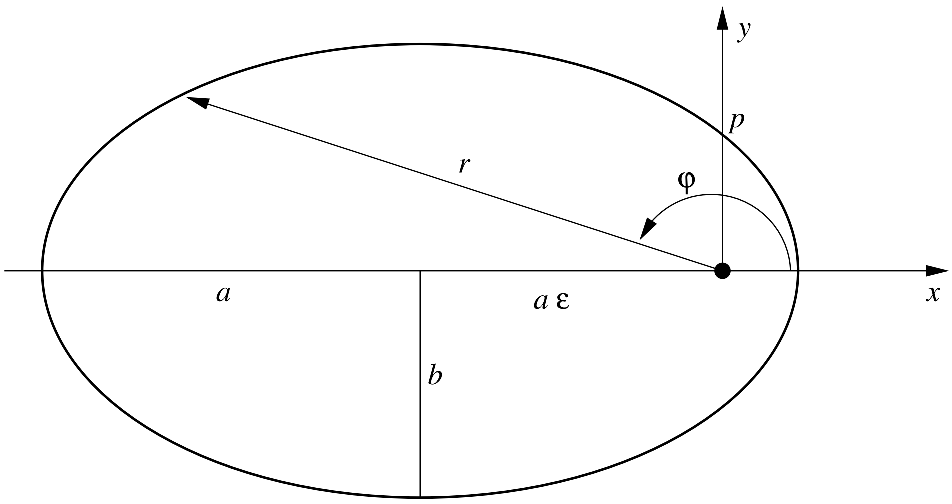

Abbildung 3: Die Ellipse als mögliche Bahnkurve ($\varepsilon < 1$) für das Keplerproblem

Für $\varepsilon = 0$, also für $v_0^2 = k/r_0$, bewegt sich die Punktmasse auf einem Kreis mit Radius r_0; mit $k_E = 3.986\,004\,42 \times 10^{14}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$ und $r_E = 6378\,\mathrm{km}$ ergibt sich am Erdäquator die Kreisbahngeschwindigkeit $v_0 = 7905\,\mathrm{m/s}$. Für $\varepsilon = 1$ bewegt sich der Massenpunkt entlang einer Parabel, für $\varepsilon > 1$ entlang einer Hyperbel und für $0 > \varepsilon < 1$ entlang einer Ellipse.

Elliptische Planetenbahn

Aus Abb. 3 können wir folgendermaßen den Zusammenhang mit Gleichung (5) herleiten: Aus der Bedingung *Die Summe der Abstände zu den Brennpunkten ist* $2a$ folgt zunächst

$$b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2).$$

Für den speziellen Wert $\varphi = \pi/2$ ergibt sich mit derselben Methode

$$p^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)^2, \quad \text{bzw.} \quad p = a(1 - \varepsilon^2),$$

Aus der Ellipsengleichung folgt nun mit $x = \varepsilon a + r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$

$$(\varepsilon a + r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi/(1 - \varepsilon^2) = a^2.$$

Erweitern mit $(1 - \varepsilon^2)$ und Zusammenfassen ergibt

$$2\varepsilon ar\cos\varphi(1 - \varepsilon^2) + r^2(1 - \varepsilon^2\cos^2\varphi) = p^2,$$

bzw.

$$2pr\varepsilon\cos\varphi + r^2(1 - \varepsilon^2\cos^2\varphi) = p^2. \tag{6}$$

Auflösen der quadratischen Gleichung nach p ergibt schließlich den Zusammenhang

$$p_{1,2} = r\varepsilon\cos\varphi \pm \sqrt{(r\varepsilon\cos\varphi)^2 + r^2(1 - \varepsilon^2\cos^2\varphi)} = \pm r + r\varepsilon\cos\varphi. \tag{7}$$

Für Ellipsen mit $\varepsilon < 1$ ist wegen $p = a(1 - \varepsilon)^2 > 0$ nur die Lösung $p_1 > 0$ interessant. Damit ist gezeigt, dass (5) für $\varepsilon < 1$ eine Ellipse beschreibt.

Die Umlaufzeit für eine elliptische Bahn lässt sich aus der Überlegung herleiten, dass die Konstante $c/2$ gemäß dem 2. KEPLERschen Gesetz der pro Zeiteinheit überstrichenen Fläche entspricht. Die Fläche der Ellipse beträgt $A_e = ab\pi = a^2\sqrt{1 - \varepsilon^2}\pi$, damit gilt

$$A_e = cT/2.$$

Mit $c^2 = pk = a(1 - \varepsilon^2)k$ folgt daraus das dem 3. KEPLERschen Gesetz entsprechende Resultat:

$$T = \frac{2A_e}{c} = \frac{2a^2\sqrt{1 - \varepsilon^2}\pi}{\sqrt{a(1 - \varepsilon^2)k}} = \frac{2\pi\sqrt{a^3}}{\sqrt{k}}.$$