Geplante Beispiele für die Übung am 5.10.2022

1 Zentralkörperproblem

Ein Massenpunkt P mit der Masse m bewegt sich in der Ebene $z = 0$ so, dass seine Beschleunigung stets zu einem festen Punkt O, der als Koordinatenursprung gewählt wird, gerichtet ist, also $a_\varphi = 0$ ist.

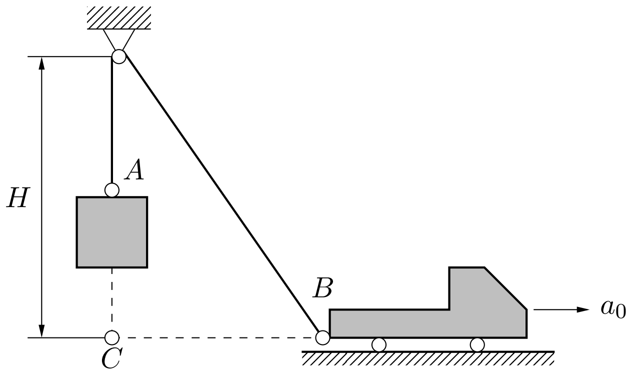
- Schreiben Sie die beiden Komponenten der Beschleunigung in Polarkoordinaten an. Aus $a_\varphi = 0$ ergibt sich eine Differentialgleichung für r und $\omega = \dot{\varphi}$. Versuchen Sie, diese zu lösen. *Hinweis:* Es ergibt sich der KEPLERsche Flächensatz, der eine Beziehung zwischen dem Radius r und der Winkelgeschwindigkeit ω beschreibt, $F(r, \omega) = \text{const.}$, aus der ω als Funktion von r und der Konstanten bestimmt werden kann.
- Nach der Elimination von ω ergibt sich eine Differentialgleichung 2. Ordnung für r. Versuchen Sie, diese für den Fall $a_r = -k/r^2$ so weit als möglich zu lösen. Programme wie Mathematica oder Maple sind dafür hilfreich.

  In der Übung wird das Problem auch mit einer alternativen Methode gelöst.

Lösung

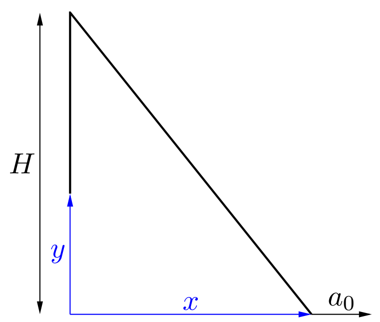
Das Keplerproblem wird im Skriptum und etwas ausführlicher in einem Handout betrachtet, das über den Tuwel-Kurs heruntergeladen werden kann.

2 Bewegung eines Gewichts



Ein LKW hebt über ein dehnstarres Seil (Länge $2H$), das über eine Rolle geführt wird, ein Gewicht an. Der LKW fährt aus dem Stand mit konstanter Beschleunigung a_0 los. Zum Zeitpunkt $t = 0$ fallen die Punkte A, B und C zusammen. Wie groß sind die Geschwindigkeit $v(t)$ und die Beschleunigung $a(t)$ des Gewichts?

Lösung



Die Punkt B bewegt sich mit $x(t)$:

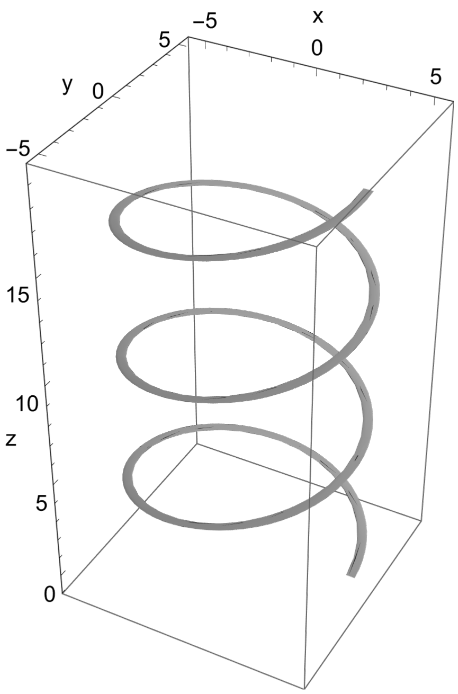
$$x = a_0 \frac{t^2}{2}, \quad \dot{x} = a_0 t, \quad \ddot{x} = a_0$$

Der Punkt A bewegt sich mit $y(t)$:

$$y = \sqrt{x^2 + H^2} - H, \quad \dot{y} = \frac{x\dot{x}}{\sqrt{x^2 + H^2}}$$

$$\ddot{y} = \frac{\left(\dot{x}^2 + x\ddot{x}\right)\sqrt{x^2 + H^2} - \frac{x^2\dot{x}^2}{\sqrt{x^2+H^2}}}{x^2 + H^2}$$

3 Punktbewegung entlang einer Schraubenlinie



Wir betrachten eine Punktmasse, die sich entlang einer Schraubenlinie bzw. Helix mit vertikaler Achse bewegt. Diese Schraubenlinie besitze die Parameterdarstellung

$$\boldsymbol{r}(\lambda) = [a\cos\lambda, a\sin\lambda, b\,\lambda]^T\,.$$

Man bestimme

- Das begleitende Dreibein: Bogenlänge s als Funktion des Parameters λ, Tangentialvektor, Normalenvektor
- Für eine Masse, die sich mit konstanter Schnelligkeit $v = ds/dt$ entlang der Kurve bewegt, die Geschwindigkeit und Beschleunigung
- Für eine Masse, die zur Zeit $t = 0$ mit $v = 0$ aus der Höhe $z_0 = b\lambda_0$ losgelassen wird und sich unter dem Einfluss der Schwerkraft mit konstanter Energie

$$E = \frac{\dot{s}^2}{2} + kb\lambda$$

bewegt, die Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Lösung

- Mit $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ folgt das begleitende Dreibein zu:

$$\boldsymbol{t} = \frac{1}{c}\,[-a\sin\lambda, a\cos\lambda, b]^T\,, \quad \boldsymbol{n} = [-\cos\lambda, -\sin\lambda, 0]^T\,, \quad \boldsymbol{m} = \boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n} = \frac{1}{c}\,[b\sin\lambda, -b\cos\lambda, a]^T$$

Aus $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s = \boldsymbol{t} = \frac{1}{c}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}\lambda$ folgt die Bogenlängenkoordinate und die Darstellung des Lagevektors als $\boldsymbol{r}(s)$

$$s = c\lambda, \quad \boldsymbol{r}(s) = [a\cos(s/c), a\sin(s/c), bs/c]^T$$

- Eine Masse mit konstanter Schnelligkeit v bewegt sich tangential zur Kurve und erfährt eine Zentripetalbeschleunigung:

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{t}, \quad \boldsymbol{a} = \frac{a}{c^2}v^2\boldsymbol{n}$$

- Bei konstanter Energie E bewegt sich eine zu $t = 0$ aus $z_0 = b\lambda_0$ losgelassene Masse gemäß:

$$s(t) = -\frac{kb}{c}\frac{t^2}{2} + c\lambda_0, \quad \boldsymbol{v} = -\frac{kb}{c}t\,\boldsymbol{t}, \quad \boldsymbol{a} = -\frac{kb}{c}\,\boldsymbol{t} + \left(\frac{kb}{c^2}\right)^2 at^2\,\boldsymbol{n}$$

Achtung: Es bezeichnet t die Zeit und $\boldsymbol{t}$ den Tangentialvektor.