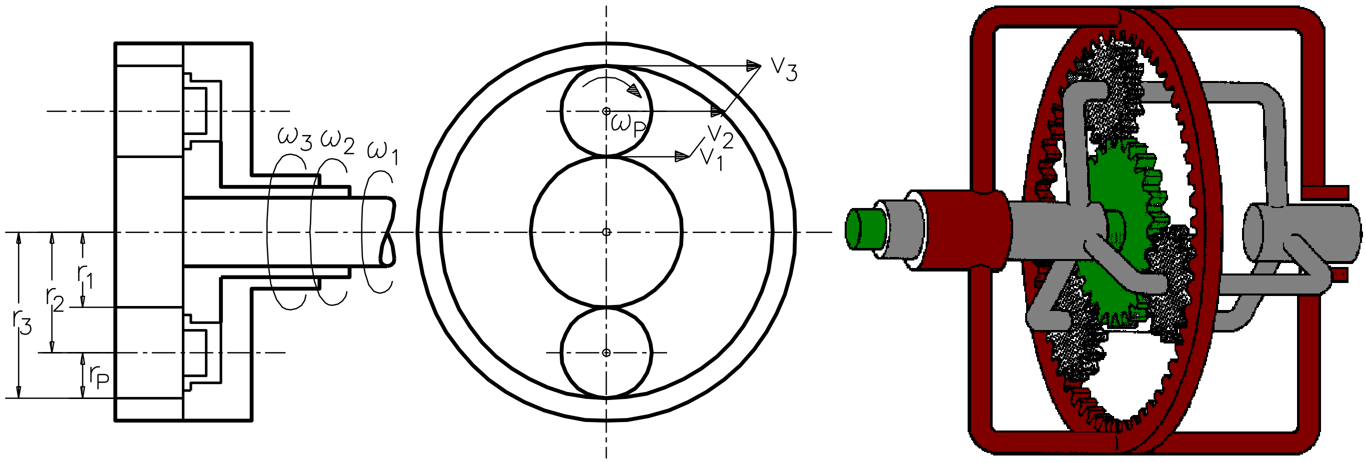
Geplante Beispiele für die Übung am 12.10.2022

1 Planetengetriebe



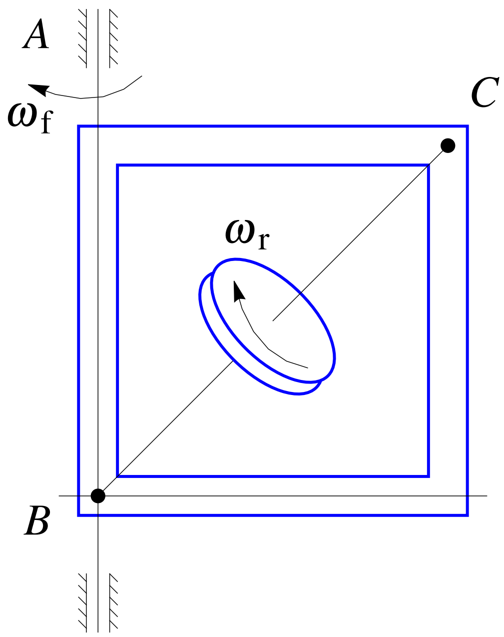
Geg.: r_1, r_2, r_3, r_P, ω_1, ω_2;

Ges.: ω_3, ω_P, v_1, v_2, v_3.

Lösung

$$v_1 = \omega_1 r_1, \quad v_2 = \omega_2 r_2, \quad v_3 = 2\omega_2 r_2 - \omega_1 r_1$$
$$\omega_3 = \frac{v_3}{r_3} = \frac{2\omega_2 r_2 - \omega_1 r_1}{r_3}, \quad \omega_P = \frac{\omega_2 r_2 - \omega_1 r_1}{r_2 - r_1}$$

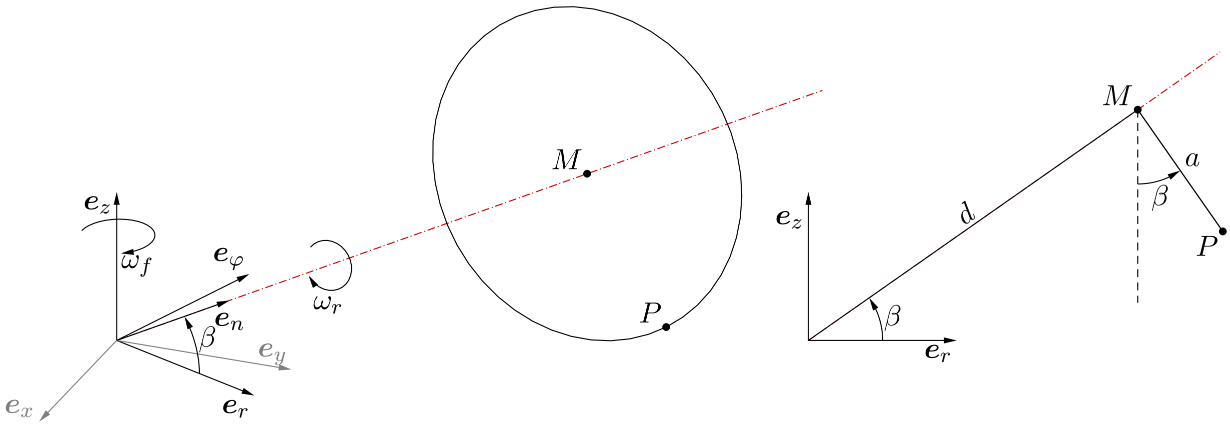
2 Rotierender Rahmen mit Scheibe



Ein Rahmen rotiert wie skizziert mit Winkelgeschwindigkeit ω_f um die vertikale Achse. In diesem Rahmen rotiert eine Scheibe um die Diagonale $\overline{BC}$. Man ermittle den Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand der Scheibe.

Lösung

Wir betrachten die Anordnung im mitbewegten Zylinderkoordinatensystem $[\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z]$, das mit der Winkelgeschwindigkeit ω_f im Uhrzeigersinn (mathematisch negativ) um die z-Achse gegenüber dem raumfesten kartesischen System $[\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z]$ rotiert; die Scheibe rotiert zusätzlich negativ mit ω_r um ihre Achse $\boldsymbol{e}_n$. Die Winkelgeschwindigkeiten ω_f und ω_r werden als konstant vorausgesetzt ($\dot{\omega}_f = \dot{\omega}_r = 0$). Zur Bestimmung des Bewegungszustands formulieren wir Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung für die Punkte M und P; einfachheitshalber soll P in der $\boldsymbol{e}_r\boldsymbol{e}_z$-Ebene liegen.



Die Lagevektoren zu den beiden Punkten besitzen in der mitbewegten zylindrischen Basis $[\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z]$ folgende Matrixdarstellung:

$$\boldsymbol{r}_M = [d\cos\beta, 0, d\sin\beta]^T\,, \quad \boldsymbol{r}_P = [d\cos\beta + a\sin\beta, 0, d\sin\beta - a\cos\beta]^T$$

Die Geschwindigkeitsvektoren zeigen für beide Punkte in negative $\boldsymbol{e}_\varphi$-Richtung:

$$\boldsymbol{v}_M = [0, -d\omega_f\cos\beta, 0]^T\,, \quad \boldsymbol{v}_P = [0, -\omega_f\,(d\cos\beta + a\sin\beta) - \omega_r a, 0]^T$$

Die Mittelpunkt führt eine reine Drehung um die z-Achse aus; seine Beschleunigung ist eine reine Zentripetalbeschleunigung:

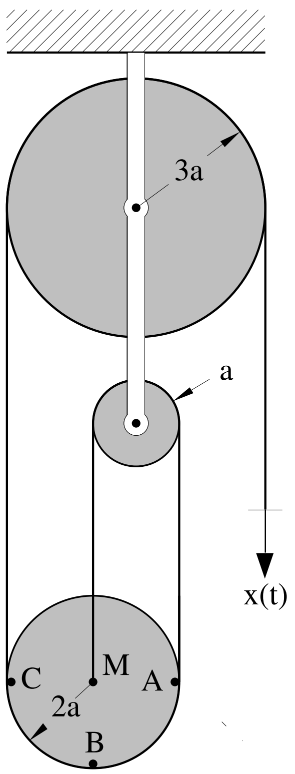
$$\boldsymbol{a}_M = \left[-d\omega_f^2\cos\beta, 0, 0\right]^T$$

Der Punkt P bewegt sich relativ zum Führungssystem; wir definieren $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{P,f} + \boldsymbol{a}_{P,c} + \boldsymbol{a}_{P,r}$ und unterscheiden zwischen Führungsbeschleunigung, Coriolisbeschleunigung und Relativbeschleunigung:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{P,f} &= \left[-\omega_f^2\,(d\cos\beta + a\sin\beta)\,, 0, 0\right]^T \\
\boldsymbol{a}_{P,c} &= \left[-2a\omega_f\omega_r, 0, 0\right]^T \\
\boldsymbol{a}_{P,r} &= \left[-a\omega_r^2\sin\beta, 0, a\omega_r^2\cos\beta\right]^T
\end{aligned}$$

Nachdem ω_f und ω_r als konstant vorausgesetzt wurden, sind $\boldsymbol{a}_{P,f}$ und auch $\boldsymbol{a}_{P,r}$ wieder durch entsprechende Zentripetalterme bestimmt, wobei $\boldsymbol{a}_{P,r}$ der Beschleunigung entspricht, die der Punkt P erfährt, wenn die Führungsbewegung „eingefroren“ wird.

3 Flaschenzug



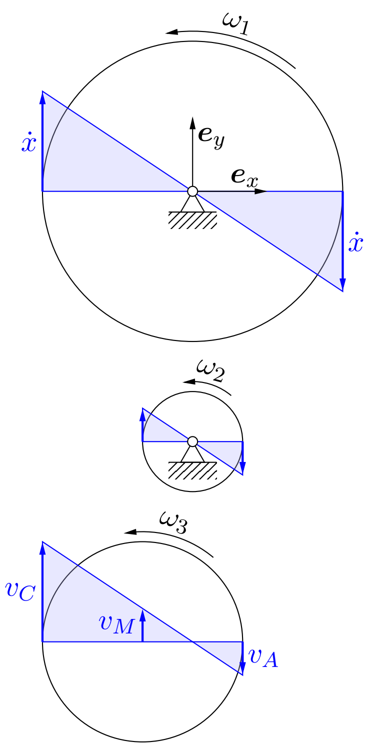
Ein undehnbares Seil wird gemäß Skizze über 3 Rollen geführt. Zwei Rollen sind unverschiebbar gelagert, während sich der Mittelpunkt M der dritten Rolle vertikal bewegen kann. Man ermittle den Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand der freien Rolle.

Gegeben: a, $x(t)$;

Gesucht:

1. $\boldsymbol{v}_M$, $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_C$;
2. $\boldsymbol{a}_M$, $\boldsymbol{a}_A$, $\boldsymbol{a}_B$, $\boldsymbol{a}_C$;
3. $\boldsymbol{a}_M$ und $\boldsymbol{a}_A$ für $x(t) = c\,t$.
4. Winkelgeschwindigkeiten der 3 Rollen

Lösung



Die Winkelgeschwindigkeiten der 3 Rollen (positiv im Gegenuhrzeigersinn) folgen zu:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = -\frac{\dot{x}}{3a}$$

Die Geschwindigkeitsvektoren der Punkte sind:

$$\boldsymbol{v}_M = \frac{\dot{x}}{3}\boldsymbol{e}_y, \quad \boldsymbol{v}_A = -\frac{\dot{x}}{3}\boldsymbol{e}_y, \quad \boldsymbol{v}_B = -\frac{2\dot{x}}{3}\boldsymbol{e}_x + \frac{\dot{x}}{3}\boldsymbol{e}_y, \quad \boldsymbol{v}_C = \dot{x}\boldsymbol{e}_y$$

Die Beschleunigungsvektoren sind:

$$\boldsymbol{a}_M = \frac{\ddot{x}}{3}\boldsymbol{e}_y$$

$$\boldsymbol{a}_A = -\frac{2\dot{x}^2}{9a}\boldsymbol{e}_x - \frac{\ddot{x}}{3}\boldsymbol{e}_y$$

$$\boldsymbol{a}_B = -\frac{2\ddot{x}}{3}\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\ddot{x}}{3} + \frac{2\dot{x}^2}{9a}\right)\boldsymbol{e}_y$$

$$\boldsymbol{a}_C = \frac{2\dot{x}^2}{9a}\boldsymbol{e}_x + \ddot{x}\boldsymbol{e}_y$$

Für $x = ct$, $\dot{x} = c$ und $\ddot{x} = 0$ vereinfachen sich die Ausdrücke zu:

$$\boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{a}_A = -\frac{2c^2}{9a}\boldsymbol{e}_x, \quad \boldsymbol{a}_B = \frac{2c^2}{9a}\boldsymbol{e}_y, \quad \boldsymbol{a}_C = \frac{2c^2}{9a}\boldsymbol{e}_x$$