Geplante Beispiele für die Übung am 19.10.2022

1 Berechnung von Verzerrungstensoren

1.1 Verzerrungstensor bei gegebener Deformation

Gegeben seien die Deformationen

$$x = \xi + 0.3\xi + 0.1\eta,$$
$$y = \eta - 0.1\xi + 0.2\eta.$$

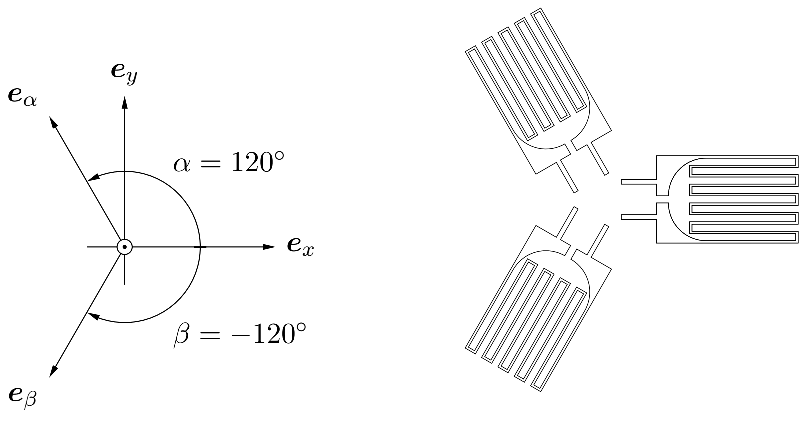
- Skizzieren Sie die Verformung eines Quadrats $\xi \in [0,1]$, $\eta \in [0,1]$.
- Berechnen Sie den *Verschiebungsgradienten* in Lagrangescher Darstellung und den *Greenschen* Verzerrungstensor.
- Berechnen Sie den *Verschiebungsgradienten* in Eulerscher Darstellung und den *Almansischen* Verzerrungstensor.

Lösung

Die Lösung ist dem Mathematica-File (verfügbar als .nb und .pdf) zu diesem Beispiel zu entnehmen, das über Tuwel heruntergeladen werden kann.

1.2 Dehnmessstreifen (Denksportaufgabe aus der VO)

Für die dargestellte Anordnung von 3 Dehnmessstreifen sollen die Komponenten des ebenen Verzerrungstensors ε_{ij} bestimmt werden. Die Dehnmessstreifen liefern die Normalverzerrungen $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_x$ in den Richtungen $\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{e}_\beta, \boldsymbol{e}_x$.



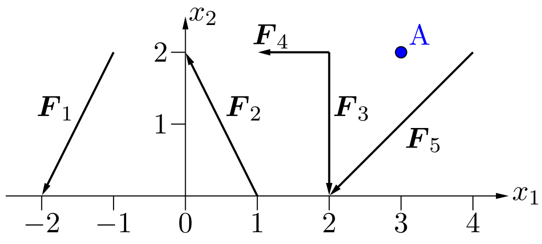
Lösung

Die gesuchten kartesischen Komponenten des linearisierten Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ sind:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha}{\sqrt{3}}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{2}{3}(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta) - \frac{1}{3}\varepsilon_x$$

2 Beispiele zu Kräftegleichgewichten

2.1 Ebenes Kraftsystem



Gegeben ist ein ebenes Kraftsystem gemäß Skizze (alle Angaben in N):

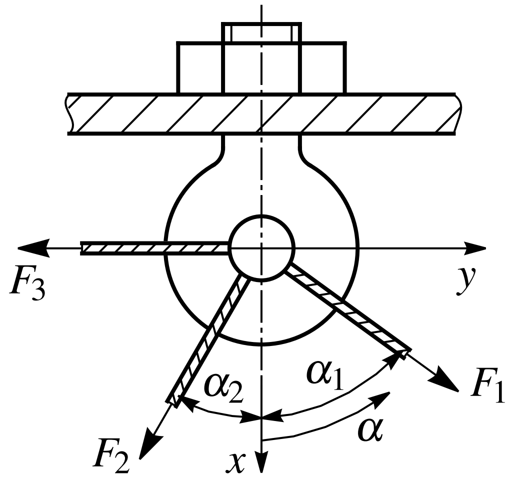
$$\boldsymbol{F}_1 = (-1,-2)^T, \quad \boldsymbol{F}_2 = (-1,2)^T, \quad \boldsymbol{F}_3 = (0,-2)^T,$$
$$\boldsymbol{F}_4 = (-1,0)^T, \quad \boldsymbol{F}_5 = (-2,-2)^T.$$

Man berechne die Resultierende $\boldsymbol{R}$ und die Momente M_0 und M_A um die Punkte $\mathbf{0}$ und $\boldsymbol{A} = (3,2)$. Die Längen in der Skizze sind in m gegeben.

Lösung

$\boldsymbol{R} = (-5\,\mathrm{N}, -4\,\mathrm{N})^T, \quad M_0 = 0\,\mathrm{N\,m}, \quad M_A = 2\,\mathrm{N\,m}$

2.2 Haken mit drei Seilen



In einem Rundhaken sind drei Seile angebracht, über die Zugkräfte übertragen werden. Bestimmen Sie Betrag und Richtung der Resultierenden dieser drei Kräfte.

Geg.: F_1, F_2, F_3, α_1, α_2;

Ges.: R, α.

Lösung

Resultierende in der Basis $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$:

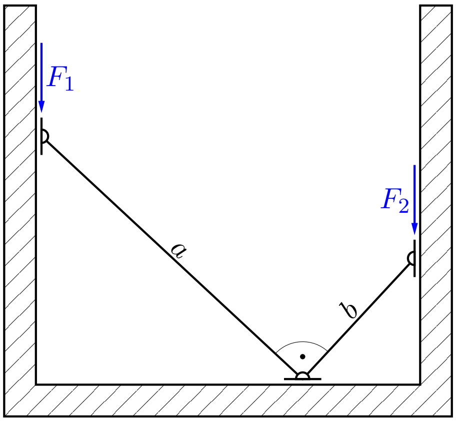
$$\boldsymbol{R} = (F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2)\,\boldsymbol{e}_x + (F_1 \sin\alpha_1 - F_2 \sin\alpha_2 - F_3)\,\boldsymbol{e}_y$$

Orientierung der Resultierenden $\boldsymbol{e}_R$ und Richtungskosinus für α

$$\boldsymbol{e}_R = \frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|}, \quad \cos\alpha = \boldsymbol{e}_R \cdot \boldsymbol{e}_x, \quad \sin\alpha = \boldsymbol{e}_R \cdot \boldsymbol{e}_y$$

2.3 Angelehnte Stäbe im Gleichgewicht

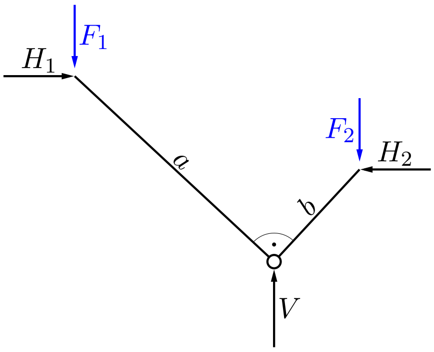
Die skizzierten homogenen Stäbe der Länge a bzw. b sind gelenkig miteinander verbunden und stützen sich horizontal bzw. vertikal an drei Punkten gegen die umgebende Wand ab. Wie durch die Gleitführungen angedeutet, soll der Kontakt mit der Wand reibungsfrei sein. In der betrachteten Gleichgewichtslage stehen die beiden Stäbe orthogonal zueinander.



Geg.: Externe Kräfte F_1, F_2; Längen der Stäbe a, b

Ges.: Reaktionskräfte in den Berührpunkten

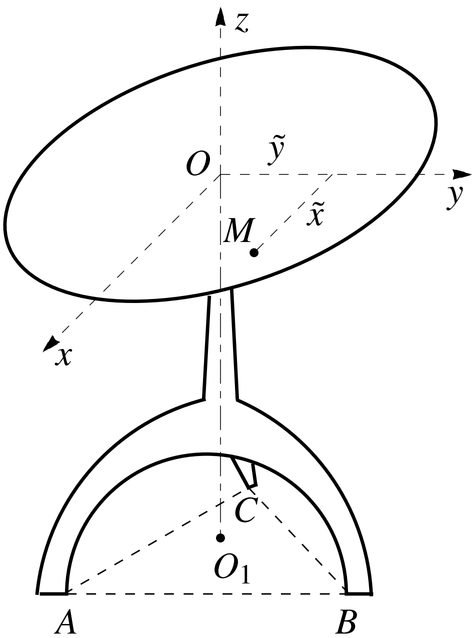
Lösung



Beide Stäbe sind Pendelstützen; die Resultierenden an den vertikalen Wänden $\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{H}_i + \boldsymbol{F}_i$ müssen daher in Richtung der Stabachsen zeigen.

$$H_1 = H_2 = \sqrt{F_1\,F_2}, \quad V = F_1 + F_2$$

2.4 Tisch auf drei Beinen

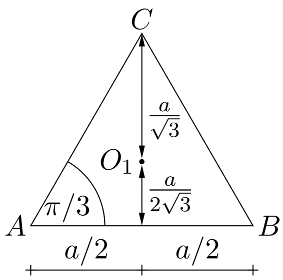


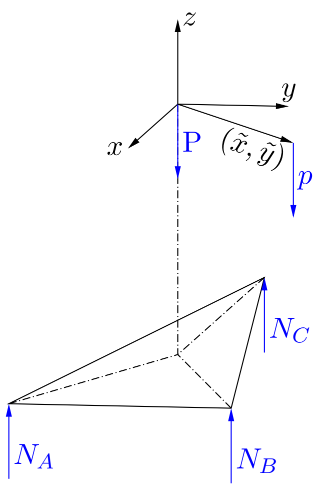
Ein Tisch stützt sich auf drei Beinen, deren Enden A, B und C ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge a bilden. Das Gewicht des Tischs ist P und sein Schwerpunkt befindet sich auf der vertikalen Linie OO_1, die zum Zentrum O_1 des Dreiecks ABC führt. Auf dem Tisch befindet sich ein Gewicht p am Punkt M mit Koordinaten $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$; die Achse Oy ist parallel zu AB. Bestimmen Sie die Auflagerkraft für jedes Tischbein.

Geg.: a, P, p, $\tilde{x}$, $\tilde{y}$;

Ges.: N_A, N_B, N_C.

Lösung





Die Gleichgewichtsbedingungen für das 3D-Kraftsystem führen auf:

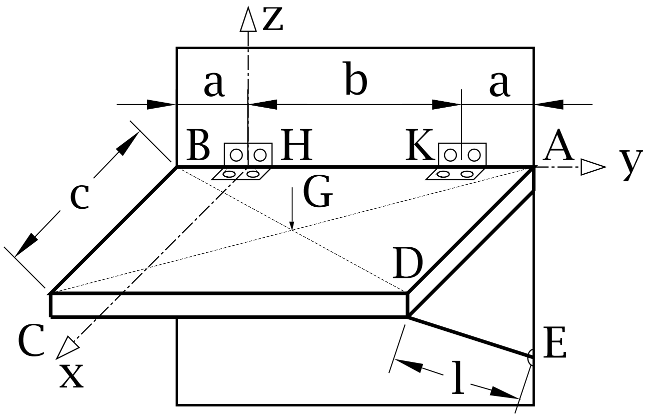
$$N_A = \frac{P}{3} + p\,\frac{a + \tilde{x}\sqrt{3} - 3\tilde{y}}{3a}$$

$$N_B = \frac{P}{3} + p\,\frac{a + \tilde{x}\sqrt{3} + 3\tilde{y}}{3a}$$

$$N_C = \frac{P}{3} + p\,\frac{a - 2\tilde{x}\sqrt{3}}{3a}$$

2.5 Brett

Ein aufklappbares Brett $ABCD$ kann sich um die Achse AB drehen. Es wird in der waagrechten Lage von einer Stütze ED gehalten, die durch das Gelenk E an der vertikalen Wand BAE befestigt ist. Die Last G wirkt im Schnittpunkt der Diagonalen des Rechtecks $ABCD$. Das Gewicht der Stütze wird vernachlässigt.

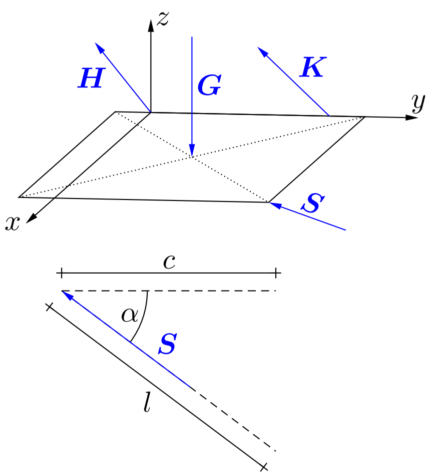


Geg.: a, b, c, l, G;

Ges.: Stützenkraft S, Reaktionen in den Scharnieren H und K.

Bemerkung: Die Scharniergelenke werden als Fest- bzw. Loslager modelliert. Eines der beiden Scharniere ist somit axial verschieblich und folglich gilt $K_y = H_y = 0$. Andernfalls wäre die Platte statisch unbestimmt gelagert.

Lösung



Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgt:

$$\boldsymbol{H} = \left(G\,\frac{a\cos\alpha}{2b\sin\alpha}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(G\,\frac{a+b}{2b}\right)\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{K} = \left(-G\,\frac{(a+b)\cos\alpha}{2b\sin\alpha}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(-G\,\frac{a}{2b}\right)\boldsymbol{e}_z$$

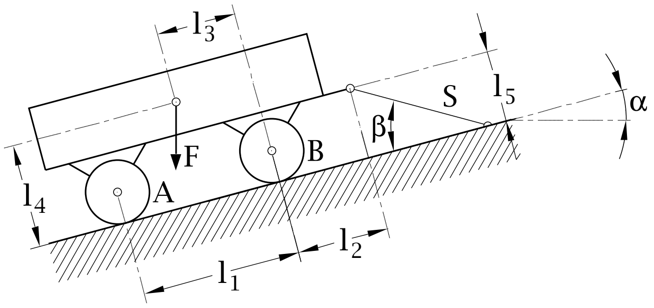
$$\boldsymbol{S} = \frac{G}{2\sin\alpha}\left(\boldsymbol{e}_x\cos\alpha + \boldsymbol{e}_z\sin\alpha\right)$$

Für die Winkelfunktionen in α gilt:

$$\cos\alpha = \frac{c}{l}, \qquad \sin\alpha = \sqrt{1-\frac{c^2}{l^2}}$$

2.6 Wagen auf schiefer Ebene

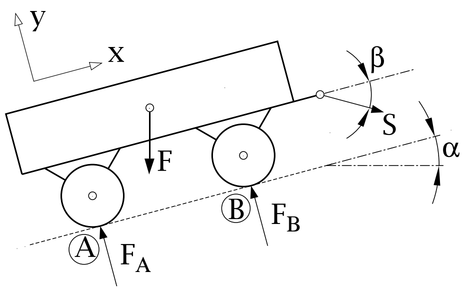
Ein Wagen mit Gesamtlast F steht auf einer unter α geneigten Ebene und wird durch ein Seil S, das mit der Ebene einen Winkel β einschließt, gehalten. Die Längenmaße l_1 bis l_5 sind bekannt.



Ihre Aufgaben:

1. Machen Sie das System frei und zeichnen Sie alle eingeprägten Kräfte und Bindungskräfte ein.
2. Bestimmen Sie die Seilkraft S.
3. Bestimmen Sie die Achslasten bei A und B. (Es reicht die Angabe der Bestimmungsgleichungen)

Lösung



Die Seilkraft beträgt:

$$S = F\,\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$$

Die Bestimmungsgleichungen für F_A und F_B ergeben sich z.B. aus dem Kräftegleichgewicht in y-Richtung (siehe Skizze) und dem Momentengleichgewicht um den Aufstandspunkt A:

$$\sum_i F_{i,y}: \qquad F_A + F_B = F\cos\alpha + S\sin\beta$$

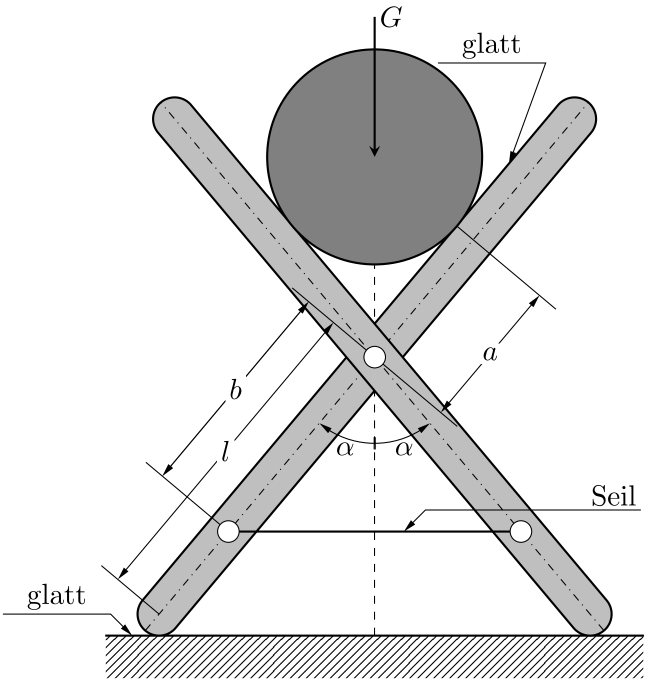
$$\sum_i M_{i,A}: \qquad F_B\,l_1 = F\,(-l_4\sin\alpha + (l_1 - l_3)\cos\alpha) + S\,(l_5\cos\beta + (l_1 + l_2)\sin\beta)$$

Zusätzlich nach F_A und F_B aufgelöst ergibt sich (nicht verlangt in der Angabe):

$$F_A = F\,\frac{l_3\cos\alpha + (l_4 - l_5 - l_2\tan\beta)\sin\alpha}{l_1}$$

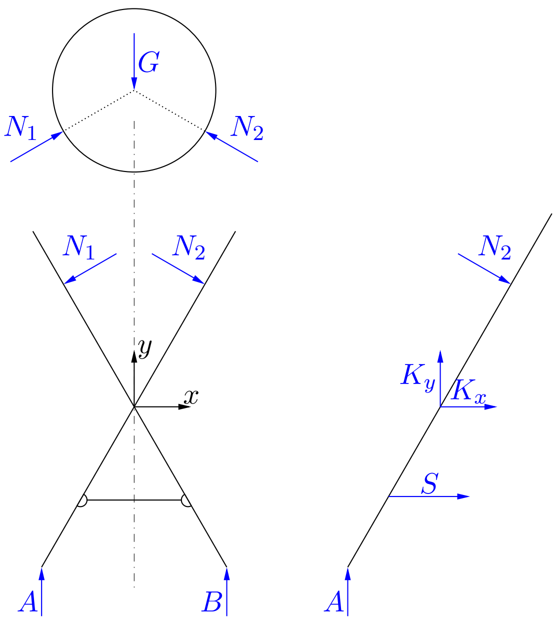
$$F_B = F\,\frac{(l_1 - l_3)\cos\alpha + (-l_4 + l_5 + (l_1 + l_2)\tan\beta)\sin\alpha}{l_1}$$

2.7 Sägebock



Für den durch ein Gewicht G belasteten, idealisierten Sägebock sollen alle Auflagerkräfte, sowie die zwischen den starren Körpern auftretenden Zwangskräfte berechnet werden. Der Bock wird als gewichtslos angenommen; seine Dicke ist vernachlässigbar.

Lösung



Aus den Gleichgewichtsbedingungen in den verschiedenen Subsystemen ergibt sich:

$$N_1 = N_2 = \frac{G}{2\sin\alpha}$$

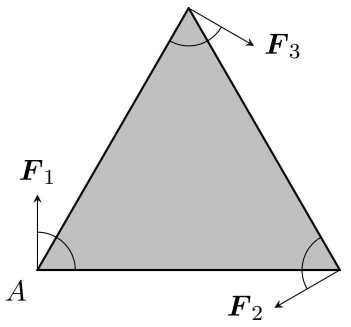
$$A = B = \frac{G}{2}$$

$$S = G\left(\frac{a}{2b\sin\alpha\cos\alpha} + \frac{l\tan\alpha}{2b}\right)$$

$$K_x = -G\left(\frac{a}{2b\sin\alpha\cos\alpha} + \frac{l\tan\alpha}{2b} + \frac{\cot\alpha}{2}\right)$$

$$K_y = 0$$

2.8 Gleichseitiges Dreieck

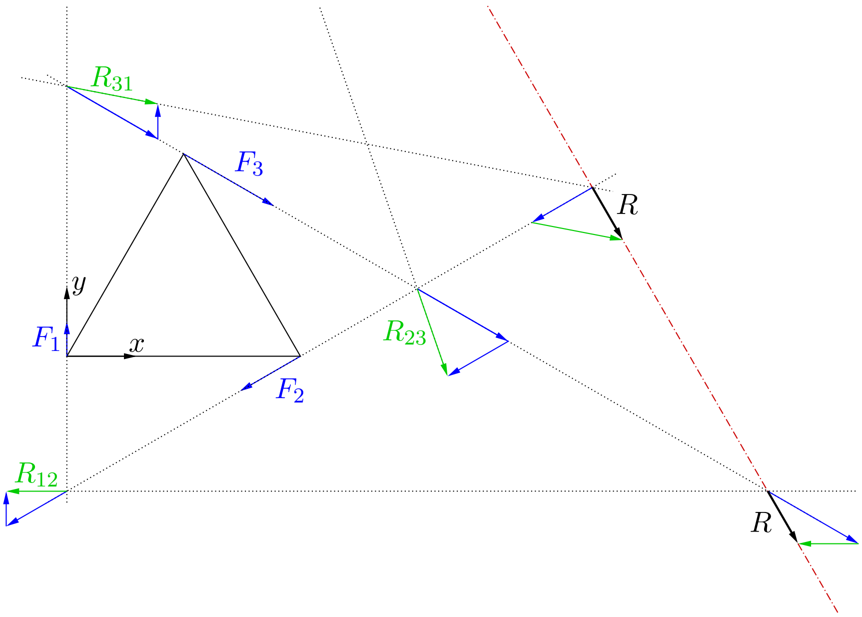


Ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge a wird an den Eckpunkten durch die Kräfte $\boldsymbol{F}_i$ belastet. Diese Kräfte wirken jeweils orthogonal zu einer Kante. Bestimmen Sie die Resultierende der Kräfte $\boldsymbol{R}$, ihre Wirkungslinie und das resultierende Moment um A.

Geg.: a, $|\boldsymbol{F}_1| = 10\text{N}$, $|\boldsymbol{F}_2| = 20\text{N}$, $|\boldsymbol{F}_3| = 30\text{N}$.

Lösung

Grafische Konstruktion der Resultierenden und ihrer Wirkungslinie über sequentielle Addition der Einzelkräfte.



Die rechnerische Lösung für die Resultierende und das Moment um A für $a = 1\,\text{m}$ ergibt:

$$\boldsymbol{R} = \left[5\sqrt{3}, -15\right]^T \text{N}, \quad M_A = -40\,\text{N}\,\text{m}$$

Die Geradengleichung der Wirkungslinie von $\boldsymbol{R}$ (a nicht explizit eingesetzt) ist:

$$y = \frac{8a - 3x}{\sqrt{3}}$$