

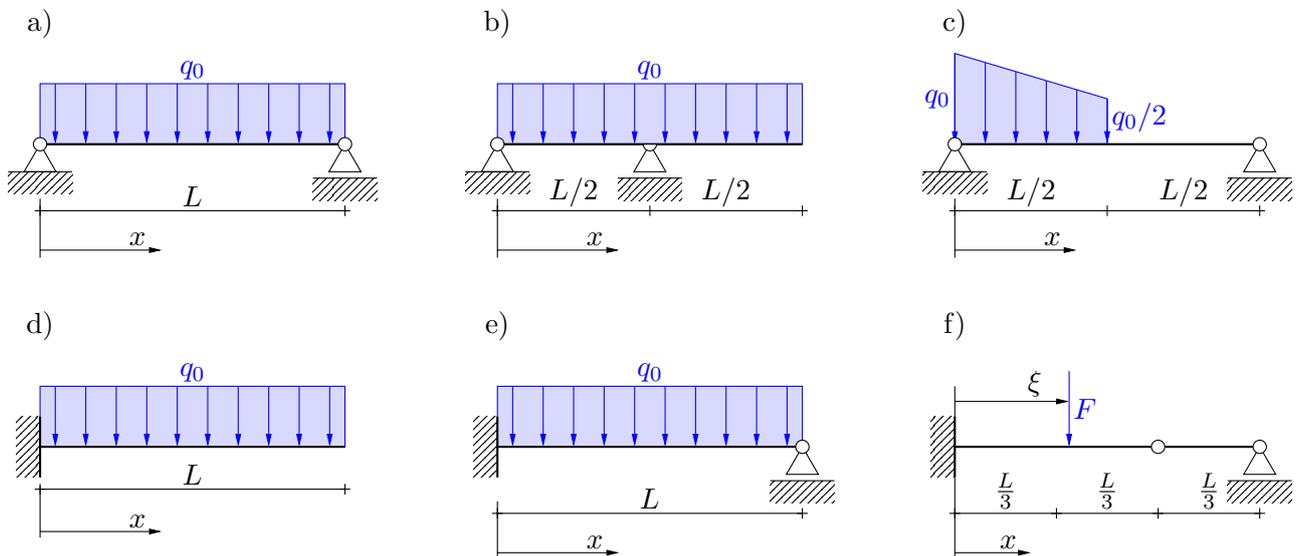
# Geplante Beispiele für die Übung am 31.10.2022

## 1 Berechnung von Schnittgrößen

### 1.1 Schnittgrößen am geraden Balken

Für die unten dargestellten Fälle (a) bis (f) sind die Auflagerreaktionen sowie die Schnittgrößen (Biegemoment  $M(x)$  und Querkraft  $Q(x)$ ) zu bestimmen. Die Beträge der Lasten ( $q_0$ ,  $F$ ) und das Längenmaß  $L$  sind gegeben. Beachten Sie:

- Die Fälle (a) bis (d) sind statisch bestimmt
- Die Anordnung für (e) ist statisch unbestimmt (eine Auflagerreaktion bleibt unbekannt)
- Für (f) wird der Angriffspunkt  $\xi$  der Kraft als variabel angesehen; es muss zwischen den Fällen  $\xi < 2L/3$  und  $\xi > 2L/3$  unterschieden werden.



### Lösung

Für die einzelnen Fälle ergeben sich folgende Lösungen für  $Q(x)$  und  $M(x)$ :

#### Bsp a)

$$0 \leq x \leq L: \quad Q(x) = \frac{q_0 L}{2} \left(1 - \frac{2x}{L}\right), \quad M(x) = \frac{q_0 L^2}{2} \left(\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right)$$

#### Bsp b)

$$0 \leq x < L/2: \quad Q(x) = -q_0 x \quad M(x) = -q_0 \frac{x^2}{2}$$

$$L/2 < x \leq L: \quad Q(x) = -q_0 L \left(\frac{x}{L} - 1\right) \quad M(x) = -\frac{q_0 L^2}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$$

**Bsp c)**

$$\begin{aligned} 0 \leq x < L/2: \quad Q(x) &= \frac{q_0 L}{24} \left( 7 - 24 \frac{x}{L} + 12 \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right), & M(x) &= \frac{q_0 L^2}{24} \left( 7 \frac{x}{L} - 12 \left( \frac{x}{L} \right)^2 + 4 \left( \frac{x}{L} \right)^3 \right) \\ L/2 \leq x \leq L: \quad Q(x) &= -\frac{q_0 L}{12}, & M(x) &= \frac{q_0 L^2}{12} \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \end{aligned}$$

**Bsp d)**

$$0 \leq x \leq L: \quad Q(x) = q_0 L \left( 1 - \frac{x}{L} \right), \quad M(x) = -\frac{q_0 L^2}{2} \left( 1 - \frac{x}{L} \right)^2$$

**Bsp e)** Die Auflagerkraft im rechten Loslager wird als statisch Unbestimmte  $B$  gewählt (positive Zählrichtung „nach oben“)

$$0 \leq \xi \leq L: \quad Q(x) = q_0 L \left( 1 - \frac{x}{L} \right) - B, \quad M(x) = -\frac{q_0 L^2}{2} \left( 1 - \frac{x}{L} \right)^2 + BL \left( 1 - \frac{x}{L} \right)$$

**Bsp f)**

$$\begin{aligned} 0 \leq \xi < 2L/3: \quad & \begin{cases} 0 \leq x < \xi: & Q(x) = F, \quad M(x) = F(x - \xi) \\ \xi \leq x < L: & Q(x) = 0, \quad M(x) = 0 \end{cases} \\ 2L/3 \leq \xi < L: \quad & \begin{cases} 0 \leq x < \xi: & Q(x) = 3F \left( 1 - \frac{\xi}{L} \right), \quad M(x) = -FL \left( 1 - \frac{\xi}{L} \right) \left( 2 - \frac{3x}{L} \right) \\ \xi < x \leq L: & Q(x) = F \left( 2 - \frac{3\xi}{L} \right), \quad M(x) = -FL \left( 2 - \frac{3\xi}{L} \right) \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \end{cases} \end{aligned}$$

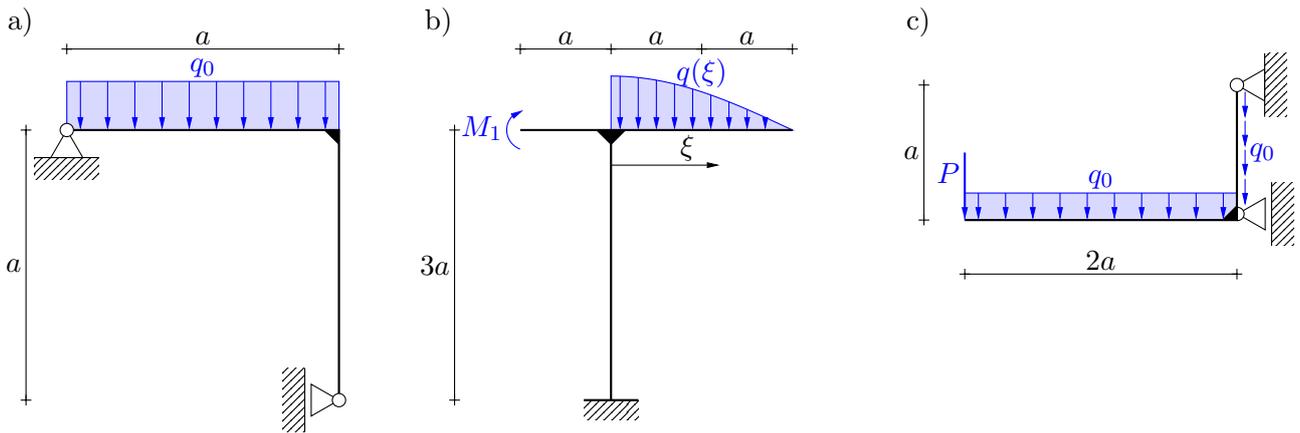
## 1.2 Schnittgrößen an verschweißten Balken (Rahmen)

Für die unten skizzierten Rahmen (a) bis (c) sind die Auflagerreaktionen sowie die Schnittgrößen (Biegemoment  $M(x)$ , Querkraft  $Q(x)$  und Normalkraft  $N(x)$ ) zu bestimmen. Eine Verschweißungen (Symbol:  $\blacktriangle$ ) bedeutet eine feste Verbindung zwischen zwei Balkensegmenten, die im Gegensatz zu einem Gelenk (Symbol:  $\circ$ ) auch Momente übertragen kann. Alle Systeme sind statisch bestimmt und das Längenmaß  $a$  ist gegeben. Darüber hinaus ist jeweils Folgendes zu beachten:

- (a) die Gleichlast mit Betrag  $q_0$  ist bekannt
- (b) ein konzentriertes Moment  $M_1$  wird am freien linken Ende eingeleitet; die verteilte Belastung ist als Funktion der Koordinate  $\xi$  gegeben:

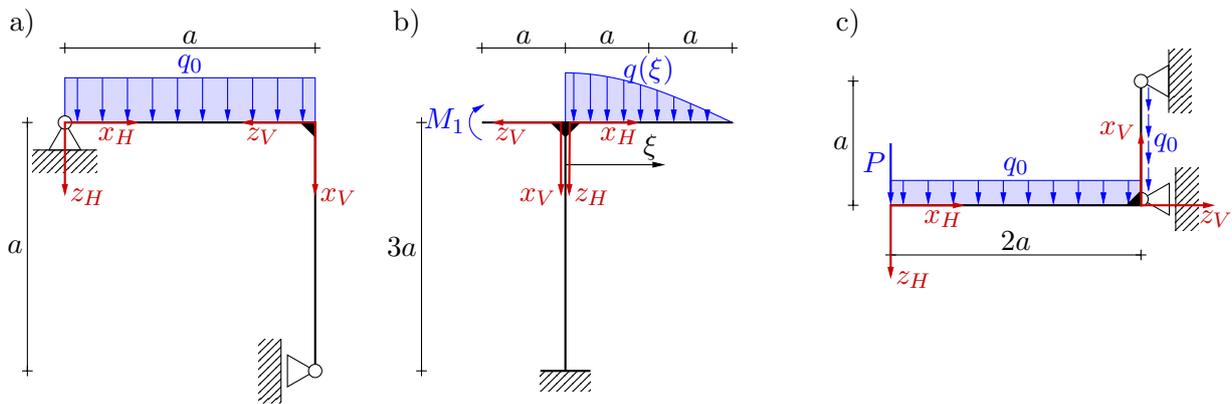
$$q(\xi) = q_0 \cos \left( \frac{\pi \xi}{4a} \right), \quad 0 \leq \xi \leq 2a$$

- (c) die verteilte Last  $q_0$  steht für das Eigengewicht des Trägers, das in beiden Abschnitten vertikal nach unten wirkt; zusätzlich greift eine konzentrierte Einzelkraft  $P$  am freien Ende an



### Lösung

Wie in der untenstehenden Abbildung dargestellt, werden für alle 3 Fälle jeweils zwei Koordinatensysteme zur Angabe der Schnittgrößen eingeführt: eines für den horizontalen Abschnitt ( $x_H, z_H$ ) und eines für den vertikalen Abschnitt ( $x_V, z_V$ ).



**Bsp a)** Die Normalkraft verschwindet überall;  $N = 0$

$$0 \leq x_H \leq a : \quad Q = q_0 a \left(1 - \frac{x_H}{a}\right), \quad M = \frac{q_0 a^2}{2} \left(2 \frac{x_H}{a} - \left(\frac{x_H}{a}\right)^2\right)$$

$$0 \leq x_V \leq a : \quad Q = -\frac{q_0 a}{2}, \quad M = \frac{q_0 a^2}{2} \left(1 - \frac{x_V}{a}\right)$$

**Bsp b)** Die Normalkraft verschwindet im horizontalen Teil ( $N(x_H) = 0$ ), während die Querkraft im vertikalen Teil null wird ( $Q(x_V) = 0$ ) – die übrigen Verläufe ergeben sich zu:

$$-a \leq x_H < 0 : \quad Q = 0, \quad M = M_1$$

$$0 \leq x_H \leq 2a : \quad Q = \frac{4q_0 a}{\pi} \left(1 - \sin\left(\frac{\pi x_H}{4a}\right)\right), \quad M = \frac{4q_0 a^2}{\pi^2} \left(\pi \left(2 - \frac{x_H}{a}\right) - 4 \cos\left(\frac{\pi x_H}{4a}\right)\right)$$

$$0 \leq x_V \leq 3a : \quad N = -\frac{4q_0 a}{\pi}, \quad M = M_1 + \frac{8q_0 a^2}{\pi^2} (2 - \pi)$$

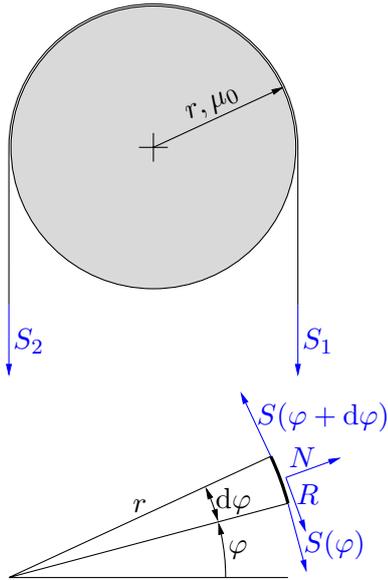
Bsp c)

$$0 \leq x_H \leq 2a : N = 0, \quad Q = -P - q_0 x_H, \quad M = -P x_H - \frac{q_0 x_H^2}{2}$$

$$0 \leq x_V \leq a : N = P + q_0 a \left(2 + \frac{x_V}{a}\right), \quad Q = 2P + 2q_0 a, \quad M = -2(Pa + q_0 a^2) \left(1 - \frac{x_V}{a}\right)$$

## 2 Beispiele zu Reibung

### 2.1 Haften eines Seiles (Eytelwein'sche Gleichung)



Ein Halteseil verläuft um eine raue Scheibe und wird an einem Ende mit der Zugkraft  $S_1$  belastet. Welche Kraft  $S_2$  muss aufgebracht werden, um die Haftreibung zu überwinden?

**Gegeben:** Radius  $r$ , Haftgrenzzahl  $\mu_0$ , Zugkraft  $S_1$

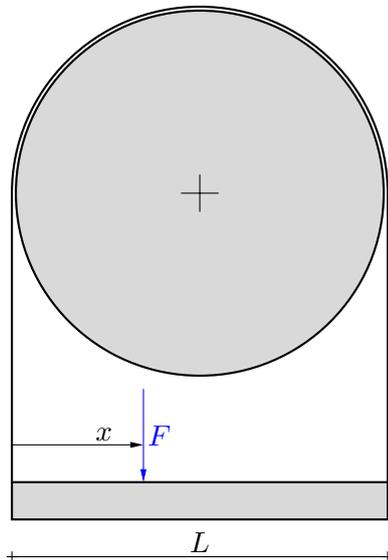
**Gesucht:**  $S_2$  damit das Seil zu gleiten beginnt

**Hinweis:** Die Betrachtung der lokalen Gleichgewichtsbedingung an einem Element  $r d\varphi$  des Seils führt auf eine Differentialgleichung für  $S(\varphi)$ . Die Lösung dieser Gleichung ist als *Euler-Eytelwein-Formel* bekannt (<https://de.wikipedia.org/wiki/Euler-Eytelwein-Formel>).

**Lösung**

$$S(\varphi) = S_1 e^{\mu_0 \varphi}, \quad S_2 = S_1 e^{\mu_0 \pi}$$

### 2.2 Aufhängung mit Reibung



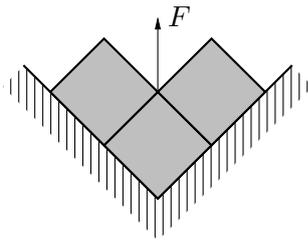
Ein Balken der Länge  $L$  hängt über ein Seil an einer Scheibe. Am Balken greift eine Kraft  $F$  an der Position  $x$  an. Wie klein darf in der skizzierten Anordnung der Abstand  $x$  äußerstenfalls werden, wenn das Seil nicht zu rutschen beginnen soll?

**Gegeben:**  $L = 2$  m, Haftgrenzzahl zwischen Seil und Scheibe  $\mu_0 = 0.18$ ; der Balken ist gewichtslos.

**Lösung**

$$x = \frac{L}{1 + e^{\mu_0 \pi}} \approx 0.725 \text{ m}$$

### 2.3 3 Würfel in einer Mulde



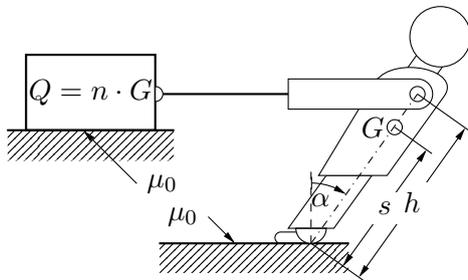
Drei Würfel mit gleichem Gewicht  $G$  liegen in einer Mulde. Wie groß muss der Betrag von  $F$  sein, um den untersten anzuheben? Der Haftreibungskoeffizient an allen Flächen sei  $\mu_0$ .

#### Lösung

Abhängig vom Reibungskoeffizienten gibt es 2 verschiedene Lösungen: Wenn  $\mu_0$  groß genug ist, haften die Würfel aneinander und werden gemeinsam hochgehoben; für kleinere Werte von  $\mu_0$  gleiten die Würfel gegeneinander.

$$F \geq \begin{cases} 2G \frac{1+\mu_0+\mu_0^2}{1+\mu_0^2} & \text{für } \mu \leq 1, \\ 3G & \text{für } \mu > 1. \end{cases}$$

### 2.4 Wie man nicht an einer Kiste ziehen soll



„Ein Mensch an einer Kiste zog, die  $n$ -mal sein Gewicht wohl wog. Die Kiste ruht auf rauhem Sand, er selbst auf rauhem Boden stand. Neigt er nach hinten sich zu sehr, so findet er den Halt nicht mehr.“<sup>a</sup> Der Winkel  $\alpha$  ist gefragt, bei dem das Gleichgewicht versagt.

<sup>a</sup>Aufgabe aus PETER HAGEDORN, *Aufgabensammlung Technische Mechanik*

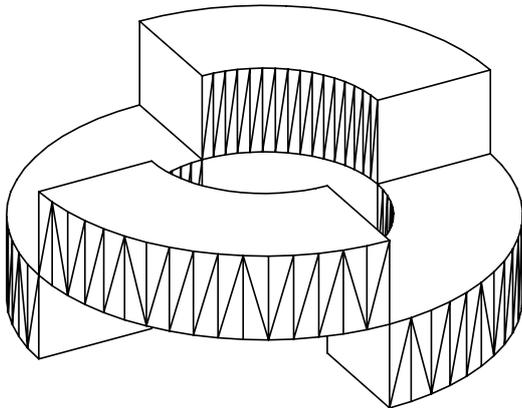
#### Lösung

Das Gleichgewicht versagt, wenn Kiste oder Person zu rutschen beginnen. Der jeweils kleinere Winkel ist ausschlaggebend für das Versagen des Gleichgewichts:

$$\tan \alpha_{\text{krit}} = \begin{cases} n\mu_0 \frac{h}{s} & \text{für } n < 1 \\ \mu_0 \frac{h}{s} & \text{für } n \geq 1 \end{cases}$$

### 3 Beispiele zu Massengeometrie

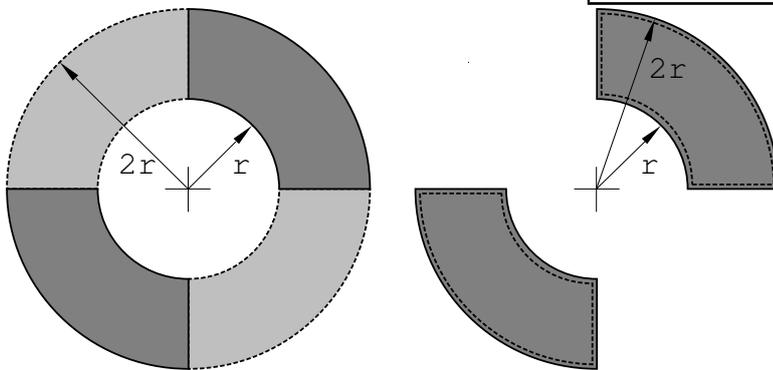
#### 3.1 Massenträgheitsmomente eines Kreisels



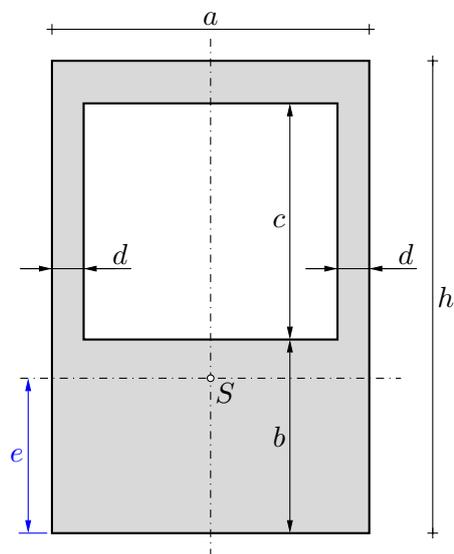
Die Schwungmasse eines Kreisels besteht aus 4 identischen Viertel-Zylinderbögen (Höhe  $h$ , Innenradius  $r$ , Außenradius  $2r$ , Gesamtmasse eines Bogens  $m$ ), die wie skizziert versetzt angeordnet sind. Man bestimme die Trägheitshauptachsen und die Massenträgheitsmomente für (a) die skizzierte Anordnung und (b) falls sich die beiden Massenpaare überdecken.

#### Lösung

vollständig durchgerechnet im Skriptum



#### 3.2 Schwerpunkt und Flächenträgheitsmomente eines Hohlprofils



Für das skizzierte Hohlprofil mit den Abmessungen (Angaben in mm):

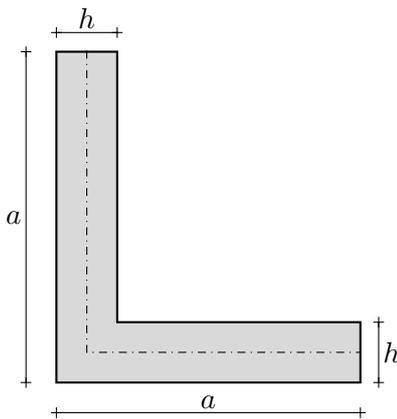
$$a = 50, \quad b = 30, \quad c = 40, \quad d = 8, \quad h = 80$$

sind die Lage des Schwerpunkts  $e$  und die Flächenträgheitsmomente zu ermitteln.

#### Lösung

vollständig durchgerechnet im Skriptum

### 3.3 L-Profil



Für das skizzierte L-Profil mit Abmessungen  $a$  und  $h$  sind gesucht:

- die Lage des Flächenmittelpunkts
- die Flächenträgheitsmomente
- die Trägheitshauptachsen

#### Lösung

Der Flächenmittelpunkt  $M$  liegt auf der Symmetrieachse. Wir geben den Abstand  $e$  allgemein und für ein dünnes Profil ( $a \gg h$ ) an:

$$e = \frac{ha(a-h)}{2(2ah-h^2)} \approx \frac{a}{4}$$

Die Flächenträgheitsmomente um  $x$  und  $y$  sind identisch:

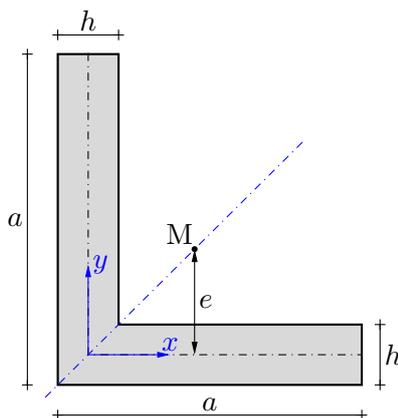
$$J_{xx} = J_{yy} = \frac{h(a-h)^3}{12} + \frac{ha^2(a-h)}{4} + \frac{h^3(a-h)}{12} + \frac{h^4}{12} \approx \frac{a^3h}{3}$$

Die Trägheitshauptachsen sind um  $45^\circ$  geneigt:

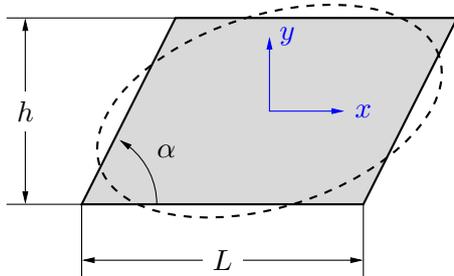
$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y), \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y),$$

Für das dünne Profil ( $a \gg h$ ) betragen die Trägheitsmomente um  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  bezogen auf den Mittelpunkt  $M$ :

$$J_{11,M} = \frac{a^3h}{3}, \quad J_{22,M} = \frac{a^3h}{12}$$



### 3.4 Parallelogramm



Gegeben ist ein Parallelogramm mit der Geometrie:

$$L = 3a, \quad h = 2a, \quad \alpha = \pi/3$$

Im  $xy$ -Koordinatensystem durch den Flächenschwerpunkt sind zu berechnen:

- die Flächenträgheitsmomente
- die Trägheitsellipse

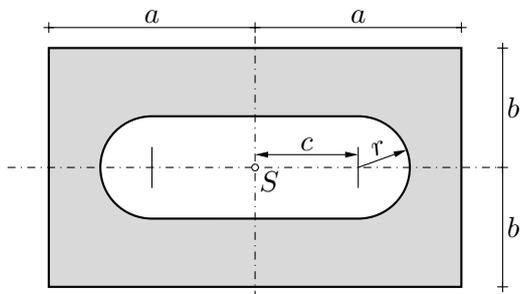
#### Lösung

Die Trägheitsellipse lässt sich wie in Beispiel 3.6 (Z-Profil) berechnen; die Trägheitsmomente im

$xy$ -System betragen:

$$J_{xx} = \frac{h^3 L}{12} = 2a^4, \quad J_{yy} = \frac{hL^3}{12} \left( 1 + \left( \frac{h}{L} \right)^2 \cot^2 \alpha \right) = \frac{31a^4}{6}, \quad J_{xy} = \frac{h^3 L}{12} \cot \alpha = \frac{2a^4}{\sqrt{3}}$$

### 3.5 Flächenträgheitsmomente eines Rechtecks mit runder Aussparung



Für das skizzierte Hohlprofil mit den Abmessungen (Angaben in mm):

$$a = 60, \quad b = 35, \quad c = 30, \quad r = 15$$

sind die Flächenträgheitsmomente zu ermitteln.

#### Lösung

Das Koordinatensystem geht durch  $S$ ; die  $x$ -Achse zeigt nach rechts,  $y$  nach oben.

Die Flächenträgheitsmomente lassen sich am einfachsten aus den Trägheitsmomenten der Elementarflächen (Rechteck, Halbkreis) zusammensetzen. Das Flächenträgheitsmoment eines Halbkreises um die  $y$ -Achse lässt sich beispielsweise über direkte Integration ermitteln:

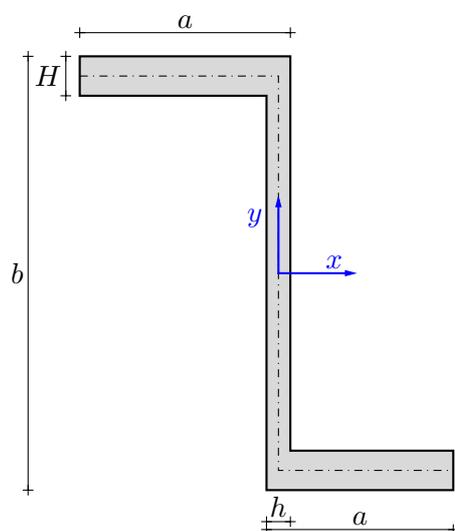
$$J_{yy, \text{HK}} = \iint_{A_{\text{HK}}} x^2 dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^r [(s \cos \varphi + c)^2 s] ds d\varphi$$

Als Endergebnis erhält man:

$$J_{xx} = \frac{4ab^3}{3} - \frac{\pi r^4}{4} - \frac{4cr^3}{3} = 3.255 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_{yy} = \frac{4a^3b}{3} - \frac{r^4}{12} \left( 12\pi \left( \frac{c}{r} \right)^2 + 32\frac{c}{r} + 3\pi \right) - \frac{4c^3r}{3} = 8.594 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

### 3.6 Z-Profil



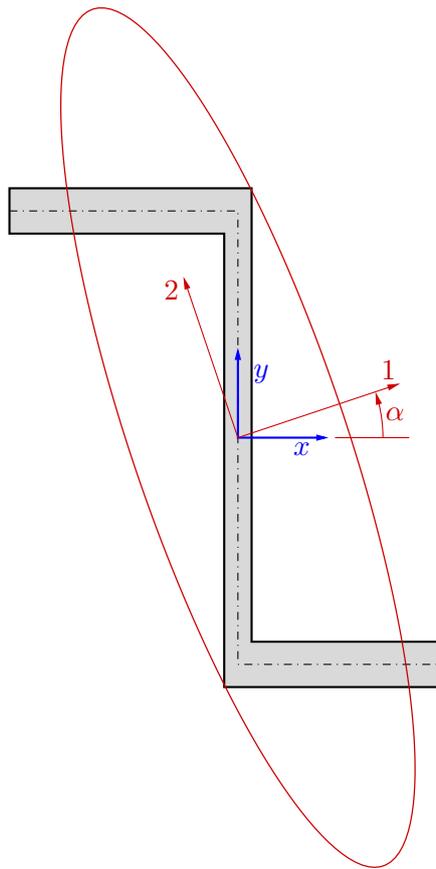
Gegeben ist ein Z-förmiges Querschnittsprofil. Die Abmessungen sind gegeben (Angaben in mm):

$$a = 70, \quad b = 180, \quad H = 12, \quad h = 7$$

Im  $xy$ -Koordinatensystem durch den Flächenschwerpunkt sind zu berechnen:

- die Flächenträgheitsmomente
- die Trägheitsellipse

## Lösung



Die Komponenten des Trägheitstensors der Flächenträgheitsmomente im  $xy$ -Koordinatensystem betragen:

$$J_{xx} = \frac{b^3 h}{12} + 2 \left[ \frac{H^3 (a - h)}{12} + \left( \frac{b - H}{2} \right)^2 (Ha - Hh) \right]$$

$$J_{yy} = \frac{bh^3}{12} + 2 \left[ \frac{H (a - h)^3}{12} + \left( \frac{a}{2} \right)^2 (Ha - Hh) \right]$$

$$J_{xy} = -\frac{Ha}{2} (a - h) (b - H)$$

Eingesetzt ergibt sich daraus (Einheit ist  $\text{mm}^4$ ):

$$J_{xx} = 1.4089 \times 10^7, \quad J_{yy} = 2.357 \times 10^6, \quad J_{xy} = -4.445 \times 10^6$$

Die Trägheitsellipse im  $xy$ -Koordinatensystem folgt der Gleichung:

$$\mathbf{x}^T \begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} \\ -J_{xy} & J_{yy} \end{bmatrix} \mathbf{x} = 1$$

Ihre Neigung ist  $\alpha = 18.5782^\circ$ ; für einen Punkt auf der Ellipse mit  $\mathbf{x} = [x, y]^T$  folgt das Trägheitsmoment um die Richtung von  $\mathbf{x}$  aus:

$$x^2 + y^2 = J^{-1}$$

Aus dieser Beziehung folgt, dass das Trägheitsmoment um die kürzere Hauptachse 1 maximal, jenes um die längere Hauptachse 2 minimal ist:

$$J_{11} = 1.5583 \times 10^7, \quad J_{22} = 8.6332 \times 10^5$$