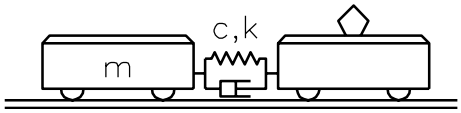
Geplante Beispiele für die Übung am 9.11.2022

1 Beispiele zu Schwerpunkt und Drallsatz

1.1 Bewegung eines Eisenbahnwaggons (aus Parkus, „Mechanik fester Körper“)



Ein Triebwagen mit Anhänger fährt aus der Ruhe mit konstanter Beschleunigung b an. Die beiden Fahrzeuge sind durch ein Feder-Dämpfersystem (c, k, ungedehnte Länge l_0) gekuppelt. Man ermittle das Bewegungsgesetz für den Anhänger.

Lösung

Die Bewegungsgleichung in „Standardform“ lautet:

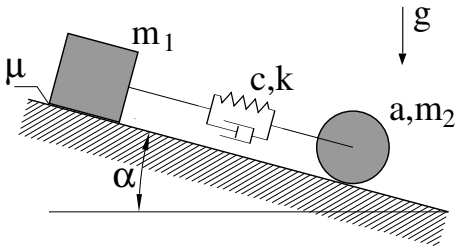
$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = 2\lambda b t + \omega^2 b \frac{t^2}{2}, \quad \text{mit: } \lambda = \frac{k}{2m},\ \omega^2 = \frac{c}{m}$$

Wenn das System aus der Ruhelage ($x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$) anfährt, lautet die vollständige Lösung:

$$x = \frac{b}{\omega^2} e^{-\lambda t} \left(\cos(\mu t) + \frac{\lambda}{\mu} \sin(\mu t) \right) + \frac{b}{2} t^2 - \frac{b}{\omega^2}, \quad \text{mit: } \mu = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$$

1.2 Klotz und Scheibe auf schiefer Ebene

Ein quaderförmiger Klotz der Masse m_1 und eine homogene Kreisscheibe (Masse m_2, Radius a) sind durch ein Feder-Dämpfersystem (Federkonstante c, Dämpferkonstante k, ungedehnte Länge l_0 verbunden. Der Gleit- bzw. Haft-reibungskoeffizient zwischen dem Klotz und der um α geneigten Unterlage betrage μ; für die Scheibe werde reines Rollen angenommen.



Gesucht:

1. Skizze der gewählten Lagekoordinaten (Freiheitsgrade)
2. Bewegungsgleichungen für das System mittels Schwerpunkt- und Drallsatz.
3. Unter welchen Bedingungen bleibt der Klotz in Ruhe?

Lösung

Das System hat 2 Freiheitsgrade; als Lagekoordinaten werden die Mittelpunkts-Verschiebungen x, y von Klotz beziehungsweise Scheibe gewählt. In der Referenzlage bei $x = y = 0$ soll das FD-System entspannt sein, die Feder ist somit für $x = y$ immer ungedehnt. Unter der Annahme, dass der Klotz gleitet, ergeben sich die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$m_1\ddot{x} + k(\dot{x} - \dot{y}) + c(x - y) = m_1 g (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$
$$\frac{3m}{2}\ddot{y} + k(\dot{y} - \dot{x}) + c(y - x) = m_2 g \sin\alpha$$

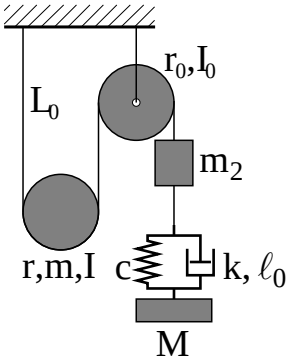
Für Haften des Klotzes ($\ddot{x} = \dot{x} = x = 0$) muss der Koeffizient μ ausreichend groß sein. Mithilfe

der Gleichgewichtsbedingungen erhält man die Bedingung:

$$\mu > \left| \frac{cy + k\dot{y} + m_1 g \sin\alpha}{m_1 g \cos\alpha} \right|$$

Die Scheibenbewegung y führt zu einer zeitlich veränderlichen Kraft am Klotz; abhängig von den Anfangsbedingungen für y kann der Klotz nach oben oder unten zu rutschen beginnen oder auch stets in Ruhe bleiben.

1.3 Bewegungsgleichungen eines Seilrollensystems (Testbeispiel 2009)



Ein undehnbares Seil der Länge L_0 wird über zwei Rollen (Masse m, Radius r, Trägheitsmoment $I = mr^2/2$ bzw. Radius r_0, Trägheitsmoment I_0) geführt. Am Ende des Seils hängt eine Masse m_2. An dieser Masse hängt an einem Feder-Dämpfersystem (Steifigkeit c, Dämpferkonstante k, ungedehnte Länge l_0) eine weitere Masse M. Man ermittle die Bewegungsgleichungen des Systems mithilfe des Massenmittelpunkt- und Drallsatzes.
Annahmen: reines Rollen, die Massenmittelpunkte bewegen sich nur vertikal (kein „Schaukeln“)

Lösung

Das System hat 2 Freiheitsgrade; gewählt wurden:

φ ... der Drehwinkel der festen Rolle 0 im Uhrzeigersinn (mathematisch negativ)

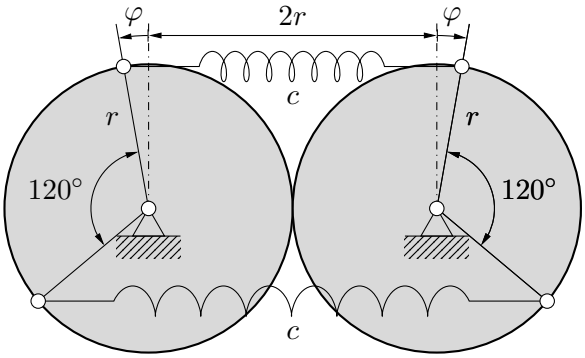
y ... die vertikale Verschiebung der großen Masse M

Das FD-System sei entspannt bei $\varphi = 0$, $y = 0$. Für diese Wahl ergeben sich die Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{\varphi}\left(\frac{3}{8}mr_0^2 + I_0 + m_2 r_0^2\right) + kr_0\left(\dot{\varphi}r_0 - \dot{y}\right) + cr_0\left(\varphi r_0 - y\right) = 0$$
$$\ddot{y}M + k\left(\dot{y} - \dot{\varphi}r_0\right) + c\left(y - \varphi r_0\right) = 0$$

1.4 Zahnräder: Bewegungsgleichungen und Stabilität der Gleichgewichtslagen

Zwei Zahnräder (jeweils Radius r, Trägheitsmoment I) rollen aufeinander ab und sind durch 2 Federn (Steifigkeit c, ungedehnte Länge $2r$) miteinander elastisch verbunden. Die Federanlenkpunkte sind auf den einzelnen Rädern um 120° gegeneinander versetzt.



- Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Drehschwingung $\varphi(t)$ der Zahnräder auf.
- Eine Gleichgewichtslage liegt bei $\varphi_1 = 30°$. Bestimmen Sie die 3 weiteren Gleichgewichtslagen $\varphi_2 \dots \varphi_4$.
- Bestimmen Sie die Stabilität der Gleichgewichtslagen.
- Wie ändert sich die Stabilität, wenn die Federn durch Feder-Dämpfersysteme mit Dämpferkonstante k ersetzt werden?

Lösung

Die Bewegungsgleichung ist gegeben durch:

$$I\ddot{\varphi} + cr^2 \sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

Die Gleichgewichtslagen sind:

$$\varphi = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}\right\} = \{30°, 120°, 210°, 300°\}$$

Davon sind jene Lagen instabil, für die sich die Federn überdecken (120° und 300°). Auch für das gedämpfte System bleiben diese Lagen instabil; die übrigen symmetrischen Lagen hingegen werden asymptotisch stabil (30° und 210°)