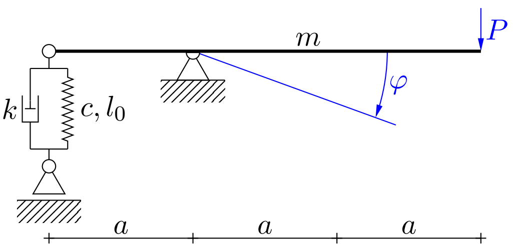
Geplante Beispiele für die Übung am 16.11.2022

1 Stabilität von Gleichgewichtslagen

1.1 Stabilität eines horizontalen Pendels (2021)

Ein schlanker Stab (Länge $3a$, Masse m) ist gelenkig gelagert, am linken Ende durch ein Feder-Dämpfer-System (Parameter: c, l_0, k) gestützt und am rechten Ende durch eine Kraft P belastet. Das FD-System und die Kraft P wirken stets vertikal; die Feder ist entspannt bei einem Winkel φ_0.



Gesucht:

1. Die Bewegungsgleichungen in φ
2. Die Gleichgewichtslagen in Abhängigkeit der Belastung P
3. Die Stabilität dieser Gleichgewichtslagen

Lösung

1. Bewegungsgleichung in φ:

$$m\ddot{\varphi} + k\dot{\varphi}\cos^2\varphi + c\sin\varphi\cos\varphi = \frac{2P}{a}\cos\varphi$$

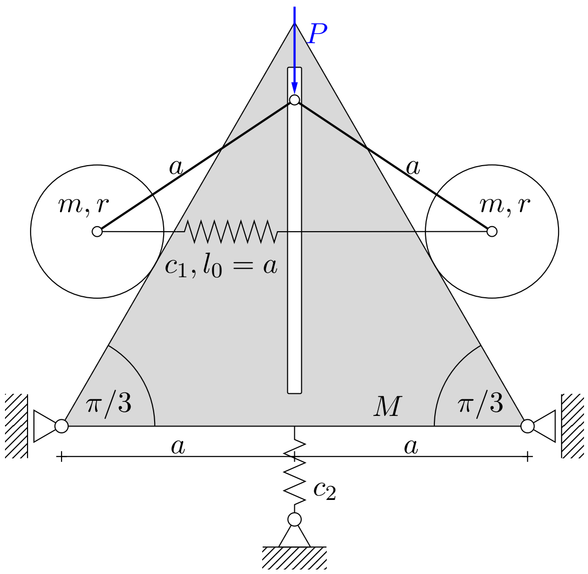
2. Gleichgewicht in Abhängigkeit von P

$$P = \frac{ca}{2}\sin\varphi_0$$

3. Die Lösung ist stabil (für $\cos\varphi_0 \neq 0$).

1.2 Rollende Scheiben auf gleichseitigem Dreieck

Die skizzierte Anordnung besteht aus zwei Scheiben (Masse m, Radius r) sowie einem geschlitzten, gleichseitigen Dreieck (Masse M, Seitenlänge $2a$). Das Dreieck ist vertikal verschieblich gelagert; eine Feder (Federsteifigkeit c_2, ungedehnt in der gezeichneten Lage) wirkt dieser Vertikalverschiebung entgegen. Im Schlitz sind zwei gelenkig verbundene, masselose Stäbe (Länge a) reibungsfrei vertikal geführt; an den anderen Endpunkten sind die Stäbe jeweils gelenkig mit den Mittelpunkten der Scheiben verbunden. Im mittleren Gelenkspunkt greift eine äußere Kraft P in vertikaler Richtung an. Die Scheiben sind zusätzlich durch eine Feder (Steifigkeit c_1, ungedehnte Länge $l_0 = a$) verbunden; die Vorspannung der Feder stellt reines Rollen zwischen den Scheiben und dem Dreieck sicher.

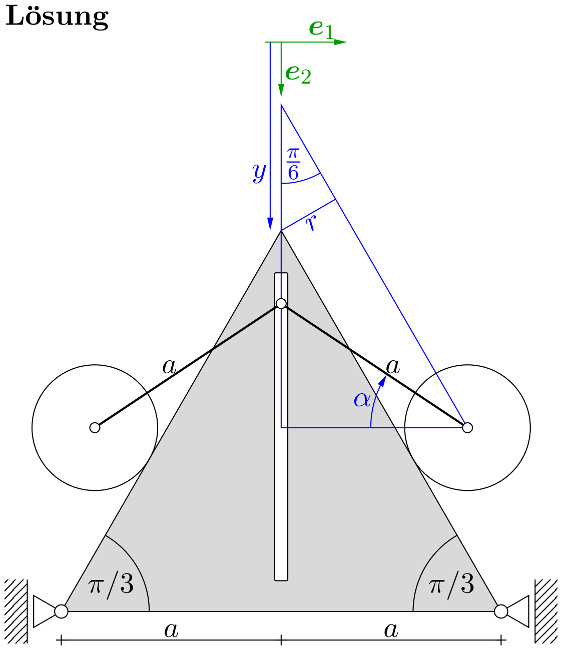


Gesucht:

1. Wie viele Freiheitsgrade hat dieses System? Wählen Sie geeignete Lagekoordinaten und zeichnen Sie diese in einer aussagekräftigen Skizze ein!
2. Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems mit Schwerpunkt- und Drallsatz
3. Bestimmen Sie den Gleichgewichtspfad für steigende Belastung P.

Knifflige Zusatzfrage: Beurteilen Sie die Stabilität des Gleichgewichtspfades.

Lösung



Freiheitsgrade: Das System hat 2 Freiheitsgrade; gewählt wurden die Verschiebung y und der Winkel α (siehe Skizze). Bei $y = 0$ ist die vertikale Feder entspannt.

Kinematik: Aus dem blau skizzierten Dreieck gewinnt man die Komponenten des Lagevektors $\boldsymbol{r}_M$ zum Mittelpunkt der Scheibe:

$$\boldsymbol{r}_M = (a\cos\alpha)\,\boldsymbol{e}_1 + \left(y + a\sqrt{3}\cos\alpha - 2r\right)\boldsymbol{e}_2$$

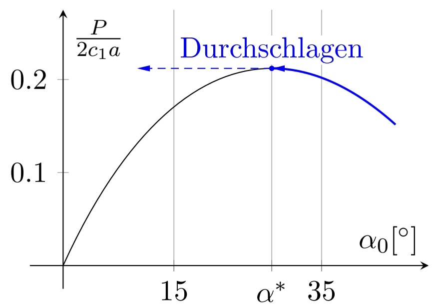
Die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe (positiv im Uhrzeigersinn) folgt aus der Rollbedingung im Kontaktpunkt:

$$\omega = -\frac{2a}{r}\dot{\alpha}\sin\alpha \tag{1}$$

Bewegungsgleichungen in den Lagekoordinaten α und y:

$$\left(-2\sqrt{3}am\sin\alpha\right)\ddot{\alpha} + (M+2m)\,\ddot{y} + \left(-2\sqrt{3}am\cos\alpha\right)\dot{\alpha}^2 + c_2 y = P$$

$$(-6am\sin\alpha)\,\ddot{\alpha} + \left(\sqrt{3}m\right)\ddot{y} + (-6am\cos\alpha)\,\dot{\alpha}^2 + c_1 a\,(2\cos\alpha - 1) = \frac{P}{2}\left(\cot\alpha + \sqrt{3}\right)$$



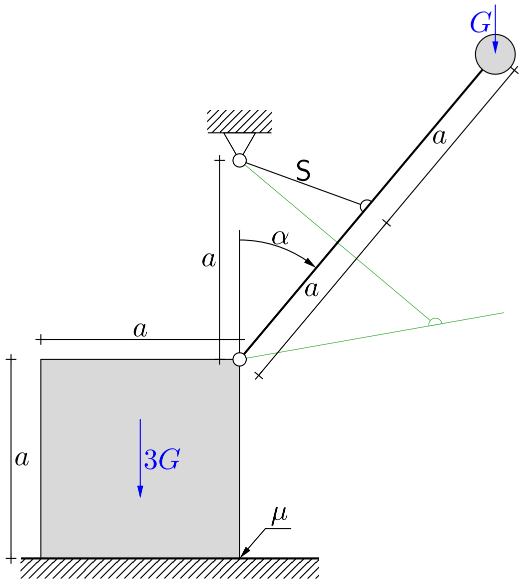
Gleichgewichtslagen sind bestimmt durch:

$$c_2 y_0 = P, \quad \frac{P}{2c_1 a} = \frac{2\cos\alpha_0 - 1}{\cot\alpha_0 + \sqrt{3}}$$

Stabilität kann wie üblich über die Eigenwerte des linearisierten Systems untersucht werden. Alternativ findet man den kritischen Punkt für Durchschlagen $\alpha^* \approx 28.25°$ als Maximum des Gleichgewichtspfades

2 Zusatzaufgabe zu Reibung / Kippen

2.1 Zugbrücke



Eine Zugbrücke (Gewicht G am freien Ende, Länge $2a$) ist gelenkig an einem Fundament (Gewicht $3G$, Seitenlänge a) befestigt. Das Fundament ruht auf einem rauen Untergrund mit dem Haftreibungskoeffizienten μ. Über ein Seil S (befestigt in der Höhe $2a$, Länge variabel) wird die Zugbrücke langsam in die Horizontale herabgelassen.

Gesucht:

1. Der erforderliche Haftreibungskoeffizient für statisches Gleichgewicht als $\mu(\alpha)$.
2. Die Bestimmungsgleichung für den kritischen Winkel α^*, für den Kippen des Fundamentblocks auftritt.

Lösung

Zwischen den drei Gelenkspunkten liegt stets ein gleichschenkeliges Dreieck (siehe Skizze). Für die Länge des Seils l und den Winkel β in den zu α gegenüberliegenden Eckpunkten dieses Dreiecks gelten die geometrischen Zusammenhänge:

$$l = a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\alpha}, \quad \cos\beta = \frac{l}{2a}, \quad \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\alpha}}$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgen Seilkraft S, Normalkraft N und Reibkraft R (positiv nach rechts):

$$S = 2\sqrt{2}G\sqrt{1-\cos\alpha}, \quad N = 2G\,(1+\cos\alpha)\,, \quad R = 2G\sin\alpha$$

Für Haften muss stets gelten:

$$\mu > \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \tan(\alpha/2)$$

Kippen tritt auf, wenn der Angriffspunkt der Kontaktkraft am Boden über die linke Ecke des Quadrats hinaus wandert. Wir zählen die Position e dieses Angriffspunkts von der rechten Kante weg und bestimmen e aus dem Momentengleichgewicht um das Gelenk:

$$\frac{e}{a} = \frac{3+4\sin\alpha}{4+4\cos\alpha}$$

Der kritische Wert $e = a$ wird bei $\alpha^* \approx 55.18°$ erreicht.