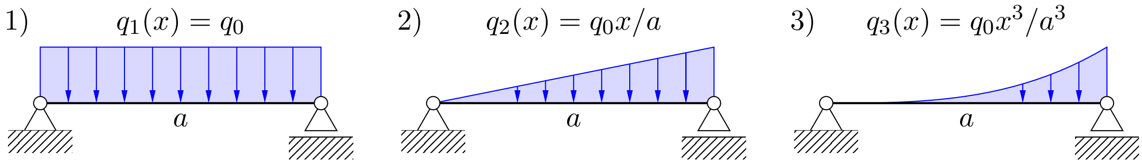
Beispiele für die Übung 4

1 Berechnung von Schnittgrößen

1.1 Statische Reduktion von verteilten Belastungen

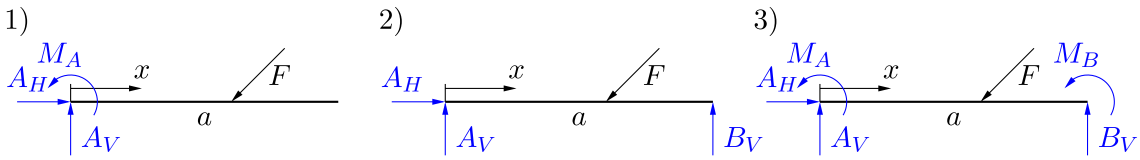
Für einen Träger auf zwei Stützen sind drei Lastfälle mit unterschiedlichen Streckenlasten $q(x)$ gemäß Skizze gegeben:



Betrachten Sie jeden Lastfall einzeln und bestimmen Sie jeweils: den Betrag der resultierenden Kraft R_i und den Angriffspunkt x_i dieser Resultierenden, also jenen Punkt auf der x-Achse um den das Moment der verteilten Last verschwindet.

1.2 Schnittgrößen – Randbedingungen

Zu drei Lagerungsfällen eines Balkens der Länge a, auf den eine eingeprägte Kraft F wirkt, wurden die Reaktionskräfte freigemacht:

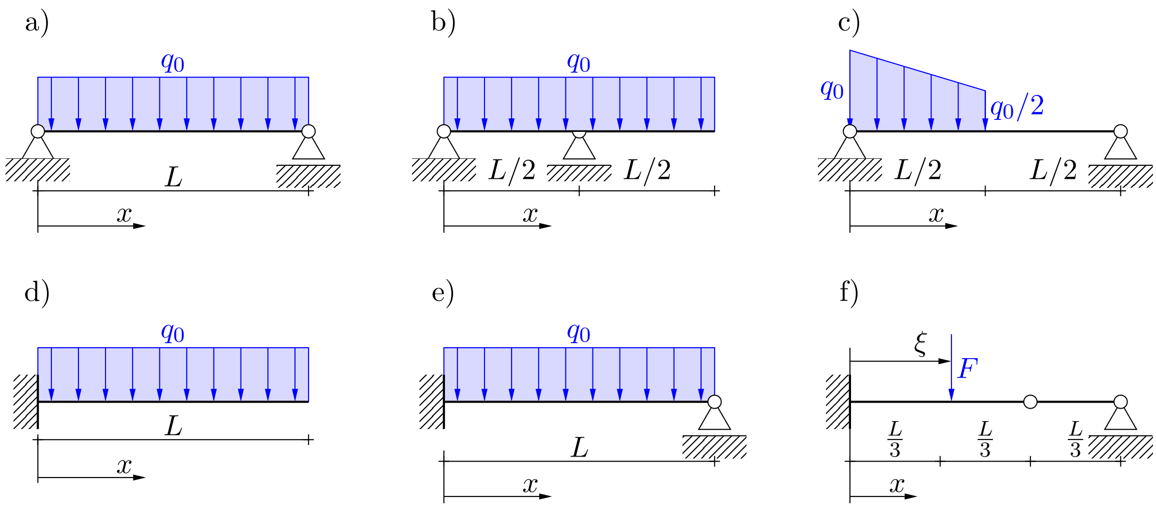


Das x, z-Koordinatensystem wird entsprechend der Vorzeichenkonvention gewählt (x nach rechts, z nach unten positiv). Welchen Lagerungsfällen entsprechen diese Skizzen, sind die Systeme statisch bestimmt oder unbestimmt und welche Randbedingungen haben die Schnittgrößen N, Q, M an den Randpunkten $x = \{0, a\}$ zu erfüllen?

1.3 Schnittgrößen am geraden Balken

Für die unten dargestellten Fälle (a) bis (f) sind die Auflagerreaktionen sowie die Schnittgrößen (Biegemoment $M(x)$ und Querkraft $Q(x)$) zu bestimmen. Die Beträge der Lasten (q_0, F) und das Längenmaß L sind gegeben. Beachten Sie:

- Die Fälle (a) bis (d) sind statisch bestimmt
- Die Anordnung für (e) ist statisch unbestimmt (eine Auflagerreaktion bleibt unbekannt)
- Für (f) wird der Angriffspunkt ξ der Kraft als variabel angesehen; es muss zwischen den Fällen $\xi < 2L/3$ und $\xi > 2L/3$ unterschieden werden.



1.4 Schnittgrößen an verschweißten Balken (Rahmen)

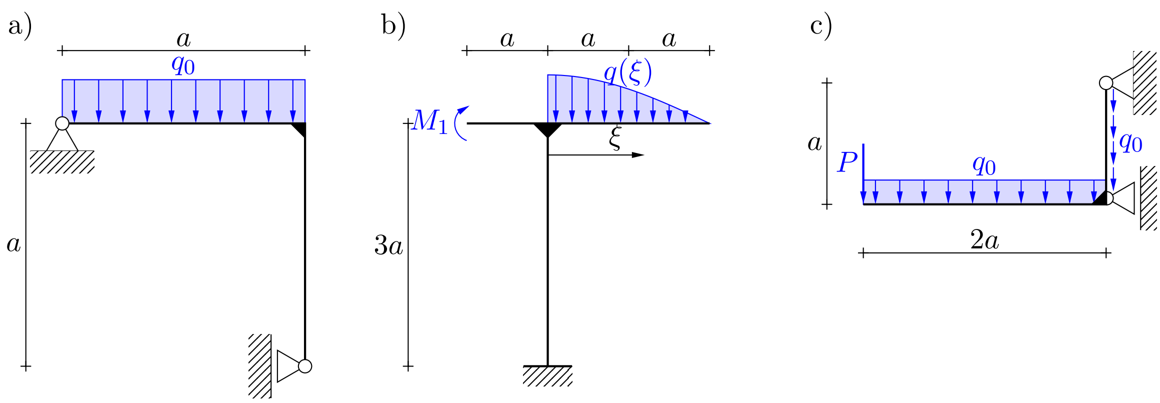
Für die unten skizzierten Rahmen (a) bis (c) sind die Auflagerreaktionen sowie die Schnittgrößen (Biegemoment $M(x)$, Querkraft $Q(x)$ und Normalkraft $N(x)$) zu bestimmen. Eine Verschweißungen (Symbol: ◣) bedeutet eine feste Verbindung zwischen zwei Balkensegmenten, die im Gegensatz zu einem Gelenk (Symbol: ○) auch Momente übertragen kann. Alle Systeme sind statisch bestimmt und das Längenmaß a ist gegeben. Darüber hinaus ist jeweils Folgendes zu beachten:

(a) die Gleichlast mit Betrag q_0 ist bekannt

(b) ein konzentriertes Moment M_1 wird am freien linken Ende eingeleitet; die verteilte Belastung ist als Funktion der Koordinate ξ gegeben:

$$q(\xi) = q_0 \cos\left(\frac{\pi\xi}{4a}\right), \quad 0 \le \xi \le 2a$$

(c) die verteilte Last q_0 steht für das Eigengewicht des Trägers, das in beiden Abschnitten vertikal nach unten wirkt; zusätzlich greift eine konzentrierte Einzelkraft P am freien Ende an



1.5 Theoriefragen

1. Wie lautet der Spannungsvektor $\boldsymbol{\sigma}_x$ in Richtung der Längsachse x eines geraden Stabes, wenn der Spannungstensor $\boldsymbol{\Sigma}$ in den kartesischen Koordinaten $\{x, y, z\}$ gegeben ist als:
$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

2. Was gilt für die Eigenwerte und Eigenvektoren des Spannungstensors?

3. Wie groß sind die Schubspannungen in den Hauptrichtungen des Spannungstensors?

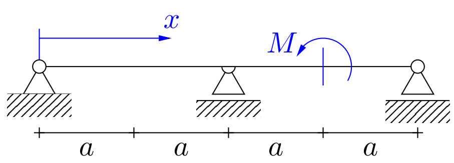
4. Formulieren Sie einen Spannungstensor, für den die Schubspannungen in allen Richtungen des Raumes verschwinden.

5. Gegeben ist ein ebener Spannungstensor, der in der kartesischen Basis $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ die Diagonalform $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{diag}(3\sigma, -\sigma)$ besitzt. Welche Komponenten besitzt der Tensor in der verdrehten Vektorbasis: $\boldsymbol{m} = (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})/\sqrt{2}$ und $\boldsymbol{n} = (-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})/\sqrt{2}$?

6. Wie nennt man die Koeffizienten I_i der charakteristischen Gleichung für die Berechnung der Eigenwerte des Spannungstensors? Geben Sie einen dieser Koeffizienten für die Tensordarstellung in kartesischen Koordinaten $\{x, y, z\}$ an.

7. Wie können für den ebenen Balken die Normalkraft N, die Querkraft Q und das Biegemoment M aus den kartesischen Komponenten des Spannungsvektors $\boldsymbol{\sigma}_x$ berechnet werden, wenn x in Achsrichtung des Balkens zeigt.

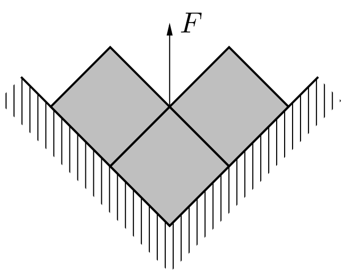
8. Betrachten Sie den dargestellten Lastfall für einen Träger auf drei Stützen.



Wie viele Bereiche in der Koordinate x müssen bei der Berechnung der Schnittgrößen unterschieden werden? Schneiden Sie das System an einer selbst gewählten Position x frei und skizzieren Sie in Übereinstimmung mit der Vorzeichenkonvention das Koordinatensystem, die Schnittgrößen an beiden Schnittufern und die Reaktionskräfte.

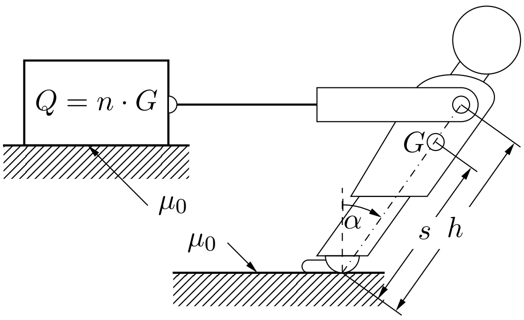
2 Beispiele zu Reibung

2.1 3 Würfel in einer Mulde



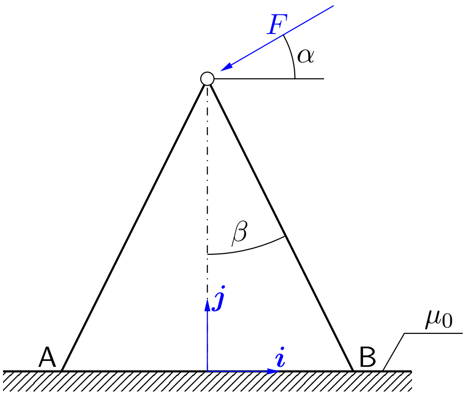
Drei Würfel mit gleichem Gewicht G liegen in einer Mulde. Wie groß muss der Betrag von $\boldsymbol{F}$ sein, um den untersten anzuheben? Der Haftreibungskoeffizient an allen Flächen sei μ_o.

2.2 Wie man nicht an einer Kiste ziehen soll



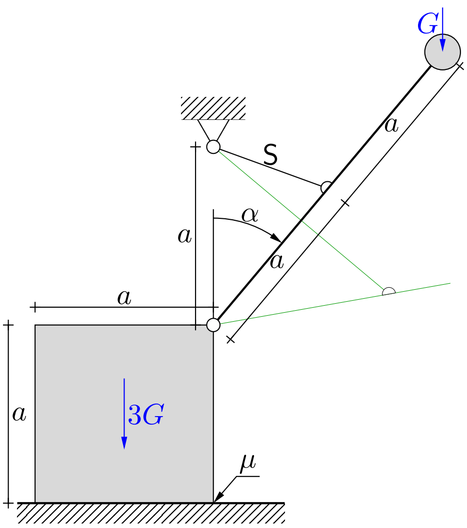
„Ein Mensch an einer Kiste zog, die n-mal sein Gewicht wohl wog. Die Kiste ruht auf rauhem Sand, er selbst auf rauhem Boden stand. Neigt er nach hinten sich zu sehr, so findet er den Halt nicht mehr.“[1] Der Winkel α ist gefragt, bei dem das Gleichgewicht versagt.

2.3 Kartenhaus



Zwei Karten bilden ein Kartenhaus, wobei der Kontakt an der Spitze näherungsweise als gelenkige Verbindung der beiden Karten angesehen werden kann. Die Karten stützen sich gegen den rauen Untergrund ab; der Haftreibungskoeffizient beträgt $\mu_0 = \tan \rho_0$. Auf der Spitze greift eine um α gegen die Horizontale geneigte Kraft F an. Bei welcher kritischen Kraft wird die Haftgrenze erreicht? Unter welcher Bedingung kann es zu Kippen des Kartenhauses kommen, wenn $0 < \{\alpha, \beta\} < \pi/2$ angenommen wird, und um welchen Kontaktpunkt kippt in diesem Fall das Kartenhaus?

2.4 Zugbrücke



Eine Zugbrücke (Gewicht G am freien Ende, Länge $2a$) ist gelenkig an einem Fundament (Gewicht $3G$, Seitenlänge a) befestigt. Das Fundament ruht auf einem rauen Untergrund mit dem Haftreibungskoeffizienten μ. Über ein Seil S (befestigt in der Höhe $2a$, Länge variabel) wird die Zugbrücke langsam in die Horizontale herabgelassen.

Gesucht:

1. Der erforderliche Haftreibungskoeffizient für statisches Gleichgewicht als $\mu(\alpha)$.

2. Die Bestimmungsgleichung für den kritischen Winkel α^*, für den Kippen des Fundamentblocks auftritt.

[1] Aufgabe aus Peter Hagedorn, *Aufgabensammlung Technische Mechanik*

2.5 Theoriefragen

1. Welche der folgenden Effekte / Rahmenbedingungen haben einen, welche haben keinen signifikanten Einfluss auf den Reibungskoeffizienten μ: Materialpaarung, Gleitgeschwindigkeit, Normalkraft, Reibungskraft, Oberflächenbeschaffenheit, Größe der Kontaktfläche?

2. Welche der Kräfte, Haftkraft oder Reibungskraft, ist eine eingeprägte Kraft? Welche ist eine Reaktionskraft? Aus welchem Gesetz lässt sich die eingeprägte Kraft bestimmen?

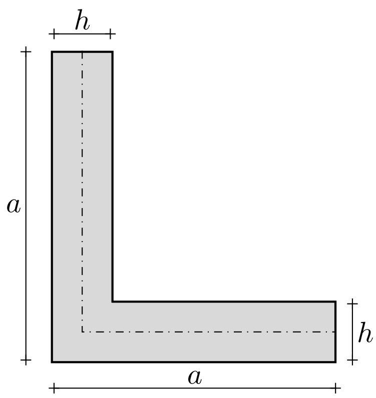
3. Was bedeutet es, wenn in einem konkreten Beispiel die Kontakt-Normalkraft N als Zugkraft wirken muss, um mechanisches Gleichgewicht sicherzustellen?

4. Skizzieren Sie eine Kennlinie für reine Coulomb-Reibung und eine typische um den Stribeck-Effekt erweiterte Kennlinie.

5. Wie kann es zum Kippen eines Körpers unter statischer Belastung kommen?

3 Beispiele zu Massengeometrie

3.1 L-Profil



Für das skizzierte L-Profil mit Abmessungen a und h sind gesucht:

- die Lage des Flächenmittelpunkts M
- die Flächenträgheitsmomente um den Bezugspunkt M
- die Trägheitshauptachsen im Bezugspunkt M

Die Ergebnisse dürfen für ein dünnes Profil mit $a \gg h$ vereinfacht werden (linearisiert um $h = 0$).

3.2 Theoriefragen

1. Unter welchen Bedingungen fallen physikalischer Schwerpunkt, geometrischer Schwerpunkt und Massenmittelpunkt zusammen?

2. Welche Eigenschaften hat der Tensor der Massenträgheitsmomente?

3. Formulieren Sie den Trägheitstensor der Massenträgheitsmomente für einen sehr dünnen Stab, wenn das Koordinatensystem seinen Ursprung im Massenmittelpunkt hat und die Koordinatenachsen in Richtung der Hauptachsen zeigen.

4. Ein Gleichseitiges Dreieck hat das Flächenträgheitsmoment J_{xx} um die x-Achse. Wie groß ist das Flächenträgheitsmoment um die y-Achse J_{yy}?

5. Die xz-Ebene ist die Symmetrieebene des Körpers. Welche Konsequenz hat diese Symmetrie für die Massenträgheitsmomente?

6. Entlang einer masselosen Stange sind zwei Punktmassen m_1 und m_2 montiert. Wie groß ist das Massenträgheitsmoment um die vertikale Achse (strichpunktiert in der Skizze)?