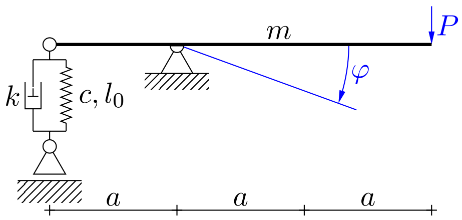
Beispiele für die Übung 6

1 Bewegungsgleichungen & Stabilität von Gleichgewichtslagen

1.1 Stabilität eines horizontalen Pendels

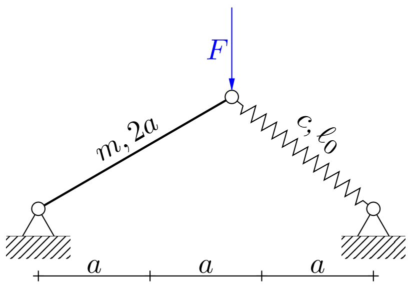
Ein schlanker Stab (Länge $3a$, Masse m) ist gelenkig gelagert, am linken Ende durch ein Feder-Dämpfer-System (Parameter: c, l_0, k) gestützt und am rechten Ende durch eine Kraft P belastet. Das FD-System und die Kraft P wirken stets vertikal; die Feder ist entspannt bei einem Winkel φ_0.



Gesucht:

1. Die Bewegungsgleichungen in φ
2. Die Gleichgewichtslagen in Abhängigkeit der Belastung P
3. Die Stabilität dieser Gleichgewichtslagen

1.2 Gefederter Stab

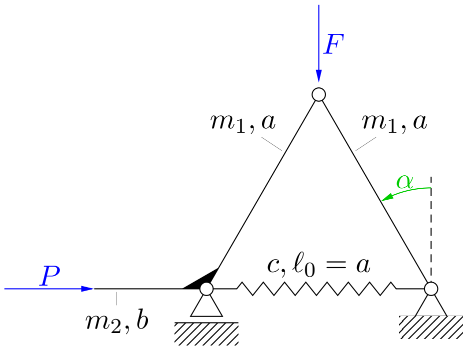


Ein dünner Stab mit Masse m und Länge $2a$ ist am einen Ende frei drehbar gelagert und am anderen Ende mit einer linearen Feder verbunden (Steifigkeit c, ungedehnte Länge ℓ_0). Die beiden Festlager sind $3a$ voneinander entfernt. Im Verbindungspunkt zwischen Stab und Feder wirkt eine vertikal nach unten gerichtete Einzelkraft F. Es ist eine geeignete Lagekoordinate zu wählen und die Stabilität einer speziellen Gleichgewichtslage zu untersuchen. Bearbeiten Sie dazu folgende Punkte der Reihe nach:

1. Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen für die gewählte Lagekoordinate.
2. Bestimmen Sie den Betrag der externen Kraft F, für den die horizontale Lage (Stab und Feder liegen auf der Verbindungslinie zwischen den Lagerpunkten) eine Gleichgewichtslage darstellt.
3. Analysieren Sie das um diese Lage linearisierte System und formulieren Sie eine Stabilitätsbedingung für die ungedehnte Länge der Feder ℓ_0.

1.3 Dreieck-Rahmen mit Totlasten

Das skizzierte mechanische System besteht aus zwei Stabsegmenten mit Länge a und Masse m_1 sowie einem kürzeren Segment mit Länge b und Masse m_2. Alle Segmente sind als dünne Stäbe aufzufassen. Die beiden längeren Segmente sind gelenkig verbunden, spannen ein gleichschenkeliges Dreieck auf und sind gegen die Umgebung durch eine Fest-Los-Lagerung abgestützt. Der kürzere Stab ist im Winkel 120° an das Ende des zweiten Segmentes angeschweißt. Zwischen Fest- und Loslager wirkt eine Feder mit Steifigkeit c.



Wenn (wie skizziert) die längeren Stäbe ein gleichseitiges Dreieck aufspannen, ist die Feder entspannt ($\ell_0 = a$) und der kürzere Stab ist rein horizontal ausgerichtet. Als externe Lasten wirken eine horizontale Kraft P und eine vertikale Kraft F auf das System.

Es ist eine geeignete Lagekoordinate (beispielsweise α) zu wählen und die Stabilität einer speziellen Gleichgewichtslage zu untersuchen. Bearbeiten Sie dazu folgende Punkte der Reihe nach:

1. Leiten Sie mithilfe von Schwerpunktsatz und Drallsatz ein Gleichungssystem her, aus dem die Bewegungsgleichung des mechanischen Systems gebildet werden kann.

2. Gehen Sie für die weiteren Punkte von folgender Bewegungsgleichung in der Winkelkoordinate α aus:

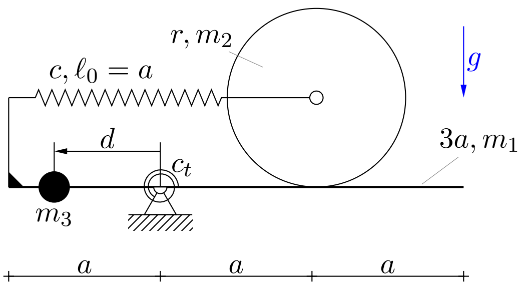
$$\begin{aligned}\ddot{\alpha}A(\alpha) - \dot{\alpha}^2 B(\alpha) = & -c(2a^2\sin(2\alpha) - 2a^2\cos\alpha) \\ & - P(2a\cos\alpha - b\sin(\alpha - \pi/6)) + aF\sin\alpha\end{aligned}$$

   mit von der Lage abhängigen Koeffizienten $A(\alpha)$ und $B(\alpha)$.

3. Bestimmen Sie den Betrag der externen Kraft P, für den die Lage $\alpha_0 = \pi/6$ eine Gleichgewichtslage darstellt.

4. Betrachten Sie das um $\alpha_0 = \pi/6$ linearisierte dynamische System und analysieren Sie die Stabilität dieser Gleichgewichtslage. Die explizite Gestalt der Koeffizienten $A(\alpha)$ und $B(\alpha)$ ist hier nicht erforderlich, weil um eine statische Gleichgewichtslage linearisiert wird.

1.4 Rolle auf Wippe – Stabilität



Eine zylindrische Scheibe (Masse m_2, Radius r) rollt auf einer drehbaren Wippe (Masse m_1, Länge $3a$). Die Wippe ist im Abstand a vom linken Ende mit einem Festlager verbunden; der freien Drehung um dieses Lager wirkt eine Drehfeder (Steifigkeit c_t) entgegen, die in der gezeichneten Lage entspannt ist. Eine Punktmasse m_3 ist im Abstand d links vom Festlager fest mit der Wippe verbunden. Am linken Ende der Wippe ist ein masseloser Stab im rechten Winkel angeschweißt; zwischen dem Ende dieses Stabes und dem Mittelpunkt der Rolle wirkt eine Linearfeder (Steifigkeit c, ungedehnte Länge $\ell_0 = a$). Die Anordnung befindet sich im Schwerefeld mit Fallbeschleunigung g.

Zu bestimmen sind die Bewegungsgleichungen, die Bedingungen für Gleichgewicht in der Lage, in der beide Federn entspannt sind und die Gleichungen des um diese Lage linearisierten Systems. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Wählen Sie geeignete Lagekoordinaten und nutzen Sie Schwerpunktsatz und Drallsatz um die Bewegungsgleichungen zu berechnen.

2. Berechnen Sie die Position d der Punktmasse so, dass sich das System wenn beide Federn entspannt sind im Gleichgewicht befindet.

3. Geben Sie das um diese Gleichgewichtslage linearisierte System an.

2 Theoriefragen

1. Formulieren Sie den Begriff der Stabilität nach der Definition von Ljapunov.

2. Beschreiben Sie die Stabilitätsanalyse eines autonomen dynamischen Systems $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ durch Linearisierung. Welche Fälle werden unterschieden und wie wird diese Unterscheidung getroffen?

3. Die Eulerschen Kreiselgleichungen besitzen Lösungen für die freie Drehung um eine Trägheitshauptachse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Welche dieser Lösungen sind stabil, welche sind instabil?

4. Was versteht man unter dem Durchschlagen eines mechanischen Systems?

5. Für drei Systeme, die um eine Gleichgewichtslage linearisiert wurden, sind die Jacobi-Matrizen der linearisierten dynamischen Systeme gegeben:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 3 & -1/4 \end{bmatrix}$$

Analysieren Sie die linearisierten Gleichungen hinsichtlich Stabilität.