1. Kurzplenum Analytische Mechanik VU, 02.12.2019

1. **Polarkoordinaten**

Die generalisierten Koordinaten eines Systems seien gegeben durch

$$x(r,\varphi) = r\cos(\varphi)$$
$$y(r,\varphi) = r\sin(\varphi)$$

Berechnen Sie die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_r$ und $\mathbf{e}_\varphi$ und zeigen Sie die folgenden Relationen für Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$$
$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$
$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi$$

Lösung:

Die Einheitsvektoren sind gegeben durch

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{\mathcal{N}}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r}\\ \frac{\partial y}{\partial r}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{\mathcal{N}}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial \varphi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin(\varphi)\\ \cos(\varphi)\end{pmatrix}.$$

Für die Position gilt

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix}r\cos(\varphi)\\ r\sin(\varphi)\end{pmatrix} = r\mathbf{e}_r.$$

Für die Geschwindigkeit gilt

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\Big[r\mathbf{e}_r\Big] = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\frac{d}{dt}\mathbf{e}_r.$$

Mit

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_r = \dot{r}\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{e}_r + \dot{\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{e}_r = \dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

erhält man

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi.$$

Für die Beschleunigung gilt

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2}{dt^2}\Big[r\mathbf{e}_r\Big] = \ddot{r}\mathbf{e}_r + 2\dot{r}\frac{d}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{e}_r = \ddot{r}\mathbf{e}_r + 2\dot{r}\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + r\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{e}_r.$$

Es gilt weiters

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{e}_r = \frac{d}{dt}\Big[\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi\Big] = \ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \dot{\varphi}\frac{d}{dt}\mathbf{e}_\varphi$$

und mit

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_\varphi = \dot{r}\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{e}_r + \dot{\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi = \dot{\varphi}\begin{pmatrix}-\cos(\varphi),\\ -\sin(\varphi)\end{pmatrix} = -\dot{\varphi}\mathbf{e}_r$$

erhält man schlussendlich

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi.$$