5. Tutorium Analytische Mechanik VU, 20.01.2020

1. **Kanonische Transformation**

   Beweisen Sie, dass es sich bei der Koordinatentransformation

   $$\bar{q}(q,p) = -p \qquad \text{und} \qquad \bar{p}(q,p) = q + Ap^2$$

   (A ist eine beliebige Konstante) um eine kanonische Transformation handelt,

   a) indem Sie zeigen, dass die neuen Koordinaten $(\bar{q}, \bar{p})$ die kanonischen Relationen für Poissonklammern erfüllen.

   b) indem Sie die zugehörige erzeugende Funktion $F_1(q, \bar{q}, t)$ konstruieren.

2. **Transformation der Hamiltonfunktion**

   Die Hamiltonfunktion $H(q,p)$ eines Teilchen der Masse m sei gegeben durch

   $$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + mgq.$$

   a) Verwenden Sie die kanonische Transformation aus Beispiel 1 und berechnen Sie die Hamiltonfunktion $\bar{H}(\bar{q}, \bar{p})$ in den neuen Koordinaten $(\bar{q}, \bar{p})$.

   b) Für welchen Wert von A wird $\bar{q}$ eine zyklische Koordinate in $\bar{H}(\bar{q}, \bar{p})$? Skizzieren Sie für diesen Fall das Hamilton'sche Vektorfeld $\mathbf{v}_{\bar{H}}(\bar{q}, \bar{p})$ und einige repräsentative Trajektorien im Phasenraum der neuen Koordinaten $\bar{q}$ und $\bar{p}$.

   c) Lösen Sie für $A = 1/(2m^2 g)$ die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen für $\bar{q}$ und $\bar{p}$ und transformieren Sie zurück um die alten Koordinaten $q(q_0, p_0, t)$ und $p(q_0, p_0, t)$ als Funktion der Zeit und der Anfangsbedingungen $q_0 = q(0)$ und $p_0 = p(0)$ zu finden.

3. **Hamilton-Jacobi Gleichung**

   Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m in zwei Dimensionen beschrieben durch

   $$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + mgy.$$

   a) Wie lautet die zugehörige Hamilton-Jacobi Gleichung für die Hamilton'sche Prinzipalfunktion $S(x, y, \alpha_1, \alpha_2, t)$?

   b) Lösen Sie die Hamilton-Jacobi Gleichung mittels Separationsansatz. Wie lauten Ihre beiden Separationskonstanten α_1, α_2?

   c) Verwenden Sie die Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung um die Koordinaten $x(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, t)$ und $y(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, t)$ als Funktion der Zeit und $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ zu bestimmen.

4. **Wirkungs-Winkelkoordinaten**

Betrachten Sie ein Teilchen mit Koordinate $q \in [-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}]$ im Box-Potential mit Abmessung d und unendlich hohen Wänden

$$V(q) = \begin{cases} 0 & |q| \leq \frac{d}{2} \\ \infty & |q| > \frac{d}{2} \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie das Hamilton'sche Vektorfeld $\mathbf{v}_H(q,p)$ und einige repräsentative Trajektorien im Phasenraum.

b) Berechnen Sie die Wirkungsvariable

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p\, dq$$

indem Sie über einen geschlossenen Orbit integrieren.

c) Wie lautet die Hamiltonfunktion $H(I)$ als Funktion der Wirkungsvariable I. Berechnen Sie daraus die Periodendauer T eines Umlaufes.

d) Berechnen Sie die zugehörige Winkelvariable $\theta(t)$ als Funktion der Zeit. Um welchen Wert erhöht sich die Winkelvariable θ bei jedem Umlauf?

Zu kreuzen (online im **TUWEL**-Kurs zur LVA): 1/2/3ab/3c/4ab/4cd