1. KURZPLENUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 30.11.2020

1

1.1 2D PENDEL OHNE GRAVITATION

Ein Massepunkt sei an einem Stab der Länge r_0 befestigt und bewege sich in der $x - y$-Ebene, ohne Gravitation.

a) Berechnen Sie die Einheitsvektoren $\hat{e}_\varphi$ und zeigen sie für die Geschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{r}} = r_0 \dot{\varphi}\, \hat{e}_\varphi. \tag{1.1}$$

b) Zeigen Sie mittels der Euler-Lagrange Gleichung dass der Drehimpuls $L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$ erhalten ist.

1.2 LÖSUNG

Der Massepunkt wird parametrisiert durch

$$x = r_0 \cos\varphi, \qquad y = r_0 \sin\varphi \tag{1.2}$$

Der Tangentialvektor $\hat{e}_\varphi$ ist

$$\hat{e}_\varphi = \frac{1}{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \frac{l}{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Die Normalisierung berechnet sich aus $\hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_\varphi = 1$ zu

$$\hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_\varphi = l^2/\mathcal{N}^2 \left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) \quad \rightarrow \quad N = l. \tag{1.4}$$

Der Ortsvektor in radiale Richtung ist (r wird nun als Variable die radiale Richtung parametrisierend aufgefasst)

$$\hat{e}_r = \frac{1}{\mathcal{N}} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Nun berechnen wir die Transformation zwischen den kartesischen Koordinaten $\hat{e}_x, \hat{e}_y$ auf $\hat{e}_r, \hat{e}_\varphi$.

$$\hat{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a\hat{e}_r + b\hat{e}_\varphi, \tag{1.6}$$

wobei die Koeffizienten a, b noch zu bestimmen sind. Wir schreiben die letzte Gleichung aus und erhalten

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

eine Gleichung der Form "$Ax = b$", genauer $A(a, b)^T = \hat{e}_x$, welche durch $(a, b)^T = A^{-1}\hat{e}_x$ gelöst wird. Dadurch ergibt sich

$$a = \cos\varphi, \qquad b = -\sin\varphi. \tag{1.8}$$

oder (Gleichung 1.6)

$$\hat{e}_x = \cos\varphi \hat{e}_r - \sin\varphi \hat{e}_\varphi. \tag{1.9}$$

Analog erhalten wir

$$\hat{e}_y = \sin\varphi \hat{e}_r + \cos\varphi \hat{e}_\varphi. \tag{1.10}$$

Die Geschwindigkeit ist

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y \tag{1.11}$$

$$= \dot{x}\left(\cos\varphi \hat{e}_r - \sin\varphi \hat{e}_\varphi\right) + \dot{y}\left(\sin\varphi \hat{e}_r + \cos\varphi \hat{e}_\varphi\right) \tag{1.12}$$

Wir berechnen noch aus Gleichung 1.2

$$\dot{x} = -r_0 \sin(\varphi)\,\dot{\varphi}, \qquad \dot{y} = r_0 \cos(\varphi)\,\dot{\varphi} \tag{1.13}$$

und damit

$$\dot{\mathbf{r}} = \left(-r_0 \sin\varphi \cos\varphi\,\dot{\varphi} + r_0 \sin\varphi \cos\varphi\,\dot{\varphi}\right)\hat{e}_r + \left(r_0^2 \sin^2\varphi\,\dot{\varphi} + r_0 \cos^2\varphi\,\dot{\varphi}\right)\hat{e}_\varphi \tag{1.14}$$

$$= r_0 \dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi. \tag{1.15}$$

Die kinetische Energie ist

$$T = \frac{m}{2}\dot{r}^2 = \frac{m}{2} r_0^2 \dot{\varphi}^2. \tag{1.16}$$

Einsetzen von $L = T$ in die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0 \tag{1.17}$$

$$\frac{d}{dt} m r_0^2 \dot{\varphi} = 0. \tag{1.18}$$

zeigt, dass die Größe $mr^2\dot{\varphi}$ erhalten ist. Der Drehimpuls

$$L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) \tag{1.19}$$

ist in Polarkoordinaten gegeben durch (Gleichungen 1.2,1.13)

$$L_z = mr^2\dot{\varphi} \tag{1.20}$$

und ist also erhalten.