HAMILTON-JACOBI Theorie

- GOLDSTEIN IX (TU Bib online)
- "Kepler Hamilton Jacobi" zB Berkeley

+ mächtig, zB Störungstheorie $\left(\Delta E_{rel} = -\frac{p^4}{8m^3c^2}\right)$

+ Quantenmechanik: SCHRÖDINGER Gleichung
$\downarrow \hbar \to 0$
HAMILTON-JACOBI

HAMILTONsche Wirkungsfunktion S
$\rightsquigarrow$ QM Wellenfunktion

+ nicht nur "alt", auch Quantengravitation startet von hier.

+ Separationsansatz: 2D KEPLER-Problem $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \qquad \text{kein } t \qquad (\mathrm{I})$$

H-J Glg.:

$$\boxed{H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0} \qquad (\mathrm{II})$$

r, φ $\qquad$ $\boxed{p_r = \frac{\partial S}{\partial r}, \quad p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi}}$

(→ auch lesen als
$\bar{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$
$\to \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_i} = \dot{\bar{q}}_i = 0$
$\to -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}_i} = \dot{\bar{p}}_i = 0$
$\to \bar{q}_i, \bar{p}_i = \text{const.}$
[GOLDSTEIN IX])

Plan: Für S lösen
$\beta_i = \frac{\partial S(q_j \ldots)}{\partial \alpha_i}$
invertieren
$\to q_j(\ldots)$

$$S = S(\underbrace{q_1, \ldots q_f}_{r,\varphi}, \underbrace{\alpha_1 \ldots \alpha_f}_{\text{Integrationskonstanten } \alpha_i}, t)$$

gleich viele (hier 2) $\to$ S als kanonische F_2-Transformation:
$\alpha_i = \bar{p}_i$ ... neue (konstante) Impulse

Separation

"Hamilton's characteristic function"

beide α

Trick, muss man wissen

$$\boxed{S(r, \varphi, \alpha_1, \alpha_2, t) = W_r(r, \alpha_1, \alpha_2) + W_\varphi(\varphi, \alpha_1, \alpha_2) - \alpha_1 t} \qquad (\mathrm{III})$$

nur r $\qquad$ nur φ $\qquad$ das erste α

Lösen:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{GMm}{r} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \qquad \text{(von I und II)}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{GMm}{r} - \alpha_1 = 0 \qquad \text{(mit III)}$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi}\right)^2}_{\varphi} = \underbrace{r^2 2m\alpha_1 + 2rGMm - r^2\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2}_{r} \qquad (\mathrm{IV})$$

eine Seite der Glg hängt nur von einer Variable ab

$$\left(\frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi}\right)^2 = \text{const.} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} = \alpha_2 \quad \rightarrow \quad W_\varphi = \alpha_2 \varphi$$

(typischerweise "einfachere Seite" zuerst, aber auch anders möglich - Tutorium 6.)

sammeln:

$$S = W_r(r, \alpha_1, \alpha_2) + \alpha_2 \varphi - \alpha_1 t$$

$\uparrow$ zyklisch in φ $\qquad$ $\nwarrow$ zyklisch in t

kennen wir schon $\quad \alpha_2 = L_z \quad \alpha_1 = E$

aus IV:

$$\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 = 2m\alpha_1 + \frac{2GMm^2}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}$$

$$W_r = \int \sqrt{2mE + 2GMm^2/r - L_z^2/r^2}\, dr$$

nochmal sammeln

$$S = \int \sqrt{2mE + 2GMm^2/r - L_z^2/r^2}\, dr + L_z \varphi - Et$$

bis jetzt nur eingesetzt, aber schon (fast) gelöst.

$$\bar{q}_1 = \frac{\partial S}{\partial \bar{p}_1} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} =: \beta_1 = \frac{\partial S}{\partial E} = \int \frac{m}{\sqrt{}}\, dr - t \xrightarrow[\text{umkehren}]{\text{Lösen (MATHEMATICA)}} r(t, \alpha_i, \beta_i)$$

F_2-Trafo $\quad \bar{p}_i = \alpha_i \quad$ def. $\quad E = \alpha_1 \quad$ Anfangsbed.

Eine Konstante, haben ja die F_2-Trafo (s) so gewählt dass alle $(\bar{q}, \bar{p}) = (\beta_i, \alpha_i) = \text{const.}$

$$\bar{q}_2 = \frac{\partial S}{\partial \bar{p}_2} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} =: \beta_2 = \frac{\partial S}{\partial L_z} = \int dr \frac{-L_z/r^2}{\sqrt{2mE + 2GMm^2/r - L_z^2/r^2}} + \varphi$$

F_2 Trafo $\quad \bar{p}_i = \alpha_i \quad$ def. $\quad L_z = \alpha_2$

$$\varphi_0 = \arccos\left(\frac{L_z^2 - GMm^2 r}{r\sqrt{2mE L_z^2 + G^2 M^2 m^4}}\right) + \varphi$$

elliptisches Integral (Buch, Internet) (Tutorium einfacher)

invertieren für $\varphi = \ldots$ $\quad$ & r genauso. $\quad$ aber schon von hier

$$r(\varphi) = \frac{c\,d}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

Bahngleichung $r(\varphi)$

$\nwarrow$ im Tutorium mit einem Trick (RUNGE-LENZ-Vektor) schneller Rechnen