1. TEST ANALYTISCHE MECHANIK VU, 03.02.2021

1 DER INVERTIERTE HARMONISCHE OSZILLATOR (20 PUNKTE)

Wir betrachten die folgende Hamiltonfunktion in einer Dimension mit kanonischer Ortskoordinate q und konjugiertem Impuls p,

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2}. \tag{1}$$

Alle Konstanten wurden 1 gesetzt, um Ihnen Rechenarbeit zu ersparen.

a) Wie lauten die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen? Wenden Sie sie explizit auf Gleichung (1) an. (*keine Lösung der Bewegungsgleichungen erforderlich*)

b) Betrachten Sie folgende Koordinatentransformation:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(p+q), \qquad b = \frac{1}{\sqrt{2}}(p-q) \tag{2}$$

Zeichnen Sie (a,b) Achsen in ein Diagramm der $q-p$ Ebene. Was für eine geometrische Transformation stellt Gleichung (2) dar?

c) Beweisen Sie mit Hilfe der Poisson Klammern, dass die Transformation $(q,p) \to (a,b)$ kanonisch ist!

d) Wie lautet H ausgedrückt in den transformierten Koordinaten $H(a,b)$?

e) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für die neuen Koordinaten da/dt, db/dt mit Hilfe der Poisson Klammern.

f) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für $a(t)$ und $b(t)$ für die Anfangsbedingungen $q(0) = 0$, $p(0) = p_0$.

2 LIOUVILLE THEOREM (15 PUNKTE)

a) In Worten, was besagt das Liouville'sche Theorem?

b) Schreiben Sie das Liouville'sche Theorem explizit, ausgedrückt durch das Hamilton'sche Geschwindigkeits-Vektorfeld, an. (*Hinweis: Gauss'scher Integralsatz*)

c) Bestimmen Sie das Hamilton'sche Geschwindigkeits-Vektorfeld $\boldsymbol{v}_H$ für die Hamiltonfunktion

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2}. \tag{3}$$

Berechnen Sie $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}_H$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne von Liouville's Theorem.

d) Skizzieren Sie den Phasenraum (q,p) für Gleichung (3). (*Die Skizze sollte Achsenbeschriftungen, mindestens je einen Vektorpfeil auf der* q*-Achse, der* p*-Achse und den beiden Diagonalen enthalten sowie insgesamt zumindest eine "typische" Trajektorie beinhalten.*)

3 TEILCHEN IM SCHIEFEN POTENTIAL (20 PUNKTE)

Die Hamilton-Funktion eines Teilchens der Masse m in 2 Dimensionen laute wie folgt:

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + c(x - y), \qquad c, m \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

a) Wie lautet die Lagrange-Funktion des Systems? Führen Sie hierzu eine Legendre-Transformation durch.
Hinweis: Benutzen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen um die Impulse p_x und p_y durch Geschwindigkeiten v_x und v_y zu ersetzen.

b) Ist die Lagrange-Funktion

$$\tilde{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \frac{2\dot{x}y^2}{m} + \dot{y}^2\right) - c(x - y) + x2y\dot{y} \tag{5}$$

mit Ihrem Resultat kompatibel? Durch welche Art von Transformation stehen die beiden Resultate in Verbindung?
Hinweis: Betrachten Sie die Differenz der beiden Lagrange-Funktionen.

c) Stellen Sie für den Hamiltonian aus Gleichung (4) die Hamilton-Jacobi Gleichung für die Hamilton'sche Prinzipalfunktion $S(x, y, \alpha_1, \alpha_2, t)$ auf und separieren Sie diese mittels eines geeigneten Separationsansatzes. Geben Sie die getrennten Differentialgleichungen für $W_x(x, \alpha_1, \alpha_2)$ und $W_y(y, \alpha_1, \alpha_2)$ an.

d) Bestimmen Sie jetzt die Hamilton'sche Prinzipalfunktion $S(x, y, \alpha_1, \alpha_2, t)$.

4 ANHARMONISCHER OSZILLATOR (15 PUNKTE)

Wir betrachten ein Teilchen in einer Dimension mit einer Hamilton-Funktion

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2} + V(q) \quad \text{mit} \quad V(q) = \frac{q^k}{2}, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

a) Für welche Werte von $k \in \mathbb{N}$ ist das Teilchen gebunden? *Hinweis: Fertigen Sie eine Skizze des Potentials für verschiedene k an! Keine Rechnung!*

b) Bestimmen Sie für allgemeines $k \in \mathbb{N}$ einen Zusammenhang zwischen der mittleren potentiellen und der mittleren kinetischen Energie eines gebundenen Teilchens. (1 dimensionales Problem) Welches Theorem haben Sie gerade abgeleitet? *Hinweis: Das Zeitmittel der Größe $d(pq)/dt$ strebt für gebundene Zustände gegen Null.*

c) Für welchen Wert von k ist die mittlere kinetische Energie gleich der mittleren potentiellen Energie?

d) Für welche Werte von k ist die Schwingungsperiode der Bewegung unabhängig von den Anfangsbedingungen? (mit Begründung!)

e) Es sei die Lösung der Bewegungsgleichungen $q(t)$ eines Teilchens mit der Hamiltonfunktion von Gleichung (6) zu den Anfangsbedinungen $q(t = 0) = q_0$, $p(t = 0) = 0$ bekannt. Wie lautet die Lösung $\bar{q}(t)$ zur Anfangsbedingung $\bar{q}(t = 0) = 3q_0$, ausgedrückt durch $q(t)$? *Hinweis: Erinnern Sie sich an das Skalierungsverhalten von Koordinaten und Zeit in der Lagrange-Funktion* L.