LÖSUNGEN ZUM 1. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 30.11.2020

1

1.1 PENDEL IN DER U-BAHN

(a) Wir transformieren die auf das Teilchen wirkende Kraft $\vec{F} = -ma\vec{e}_x - mg\vec{e}_z$ auf die neue z-Achse $\vec{e}_{\tilde{z}} = a\vec{e}_x + g\vec{e}_z/|a\vec{e}_x + g\vec{e}_z|$. Damit erhalten wir wieder ein Pendel im modifizierten Gravitationsfeld $\tilde{\vec{F}} = -m\tilde{g}e_{\tilde{z}}$, mit $\tilde{g} = \sqrt{a^2+g^2}$ und initialer Auslenkung $\Theta_0 = \arccos\left(g/\sqrt{a^2+g^2}\right)$. Die generalisierte Koordinate ist die Auslenkung Θ, mit Koordinaten (siehe lecture notes) des Pendels $\tilde{x} = l\sin\Theta, \tilde{y} = -l\cos\Theta$. Die Kraft ist $F = m\tilde{g}\sin\Theta$

(b) Wir linearisieren die Bewegungslgleichungen

$$ma = F \tag{1.1}$$

$$ml\ddot{\Theta} = -m\tilde{g}\sin\Theta \tag{1.2}$$

$$\ddot{\Theta} \approx -\frac{\tilde{g}}{l}\Theta. \tag{1.3}$$

Der Ansatz

$$\Theta(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \tag{1.4}$$

erfüllt mit $\omega^2 = \tilde{g}/l$ die Differentialgleichung. Der Startwert $\dot{\Theta}(0) = 0$ führt auf $A = 0$ und $\Theta(0) = \Theta_0$ auf $B = \Theta_0$,

$$\Theta(t) = \Theta_0\cos\left(\frac{\tilde{g}}{l}t\right). \tag{1.5}$$

(c) Die Schwingungsperiode ($\cos(0) = \cos(2\pi)$) ist $T = 2\pi\sqrt{l/\tilde{g}}$. Die potentielle Energie ist

$$V = mgh = mgl\,(1-\cos\Theta) \tag{1.6}$$

$$\approx \frac{mgl\Theta^2}{2} \tag{1.7}$$

oder auch so

$$V(\Theta) = -\int \mathbf{F}(\Theta)\,d\mathbf{r} = -\int F(\Theta)\,l\,d\Theta \tag{1.8}$$

$$= \int mg\Theta\,d\Theta = \frac{mgl\Theta^2}{2}. \tag{1.9}$$

Die Gesamtenergie ist

$$E = E_{kin} + E_{pot} \tag{1.10}$$

$$= \frac{m(l\dot{\Theta})^2}{2} + \frac{mgl\Theta^2}{2}. \tag{1.11}$$

Die Maximalgeschwindigkeit ist demnach

$$E = \frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{m(l\dot{\Theta}_{max})^2}{2} = \frac{mgl\Theta_0^2}{2} \tag{1.12}$$

$$\rightarrow \quad v_{max} = l\dot{\Theta}_{max} = \sqrt{gl}\Theta_0. \tag{1.13}$$

(a) Die Gesamtenergie $E = T + V$ ist die Summe aus kinetischer Energie

$$T = \frac{mv^2}{2} \tag{1.14}$$

und potentieller Energie

$$V(x) = \frac{k}{2a^2}\Big(\frac{1}{\cos^2(ax)} - 1\Big). \tag{1.15}$$

Man erhält

$$E = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{k}{2a^2}\tan^2(ax) \tag{1.16}$$

$$\longrightarrow\ v = \pm\sqrt{v_0^2 - \frac{k}{ma^2}\Big(\frac{1}{\cos^2(ax)} - 1\Big)}. \tag{1.17}$$

Die Umkehrpunkte liegen bei

$$v(v_0, x_U) = 0\ \longrightarrow\ v_0^2 = \frac{k}{ma^2}\tan^2(ax_U) \tag{1.18}$$

$$\longrightarrow\ x_U = \pm\frac{1}{a}\arctan\Big(\sqrt{\frac{ma^2v_0^2}{k}}\Big) \tag{1.19}$$

(b) Es gilt

$$dt = \frac{1}{v}\,dx\ \longrightarrow\ \int_{t(x_0)}^{t(x)} dt = \int_{x_0}^{x}\frac{1}{v(E,x')}\,dx' \tag{1.20}$$

$$\longrightarrow\ t(x) = \int_0^x \frac{1}{v(E,x')}\,dx' \tag{1.21}$$

wobei verwendet wurde, dass zur Anfangszeit $x(0) = x_0 = 0$ gilt. Einsetzten liefert das Integral

$$\begin{aligned} t(x) &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{v_0^2 - \frac{k}{ma^2}\frac{1}{\cos^2(ax')} + \frac{k}{ma^2}}}\,dx' = \\ &= \frac{1}{v_0}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{ma^2} - \frac{k}{ma^2v_0^2}\frac{1}{\cos^2(ax')}}}\,dx' \\ &= \frac{1}{v_0}\frac{1}{a\sqrt{1+b}}\arcsin\Big(\sqrt{1+b}\sin(ax)\Big) \end{aligned} \tag{1.22}$$

mit $b = \frac{k}{ma^2v_0^2}$ und umgekehrt

$$x(t) = \frac{1}{a}\arcsin\Big(\frac{1}{\sqrt{1+b}}\sin\Big(v_0at\sqrt{1+b}\Big)\Big) \tag{1.23}$$

(c) Die Schwingungsperiode ist

$$T = \frac{2\pi}{v_0a\sqrt{1+b}} = \frac{2\pi}{\sqrt{(v_0^2a^2 + \frac{k}{m})}}. \tag{1.24}$$

Im Grenzfall kleiner Anfangsgeschwindigkeiten $v_0 \approx 0$ erhält man das Resultat des harmonischen Oszillators

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{(v_0^2 a^2 + \frac{k}{m})}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{1.25}$$

Im Grenzfall hoher Anfangsgeschwindigkeiten $v_0 \to \infty$ erhält man das Resultat

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{v_0^2 a^2 + \frac{k}{m}}} \approx \frac{1}{v_0}\frac{2\pi}{a} \approx \frac{2L}{v_0}, \tag{1.26}$$

welches einem Teilchen entspricht das mit konstanter Geschwindigkeit v_0 zwischen zwei harten Wänden im Abstand L hin und her reflektiert wird.

1.3 TEILCHEN IN EINER HÜGELLANDSCHAFT

(a) Die skleronome holonome Zwangsbedingung lautet

$$f(x, y) = y - \cos x = 0. \tag{1.27}$$

(b) Die generalisierte Koordinate

$$x(\eta) = \eta \tag{1.28}$$
$$y(\eta) = \cos\eta \tag{1.29}$$

erfüllt die Zwangsbedienung eq. (1.27) für alle $\eta \in \mathbb{R}$ und weiters kann jeder Punkt der Hügellandschaft mit geeignetem η erreicht werden.

(c) Die Newtonsche Bewegungsgleichung mit Zwangskraft $\vec{F}^R$ in kartesischen Koordinaten lautet

$$m\ddot{\vec{r}} = -mg\vec{e}_y + \vec{F}^R. \tag{1.30}$$

Der Einheitsvektor $\vec{e}_\eta$ ist

$$\vec{e}_\eta = \frac{1}{\mathcal{N}}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta} = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2(\eta)}}\begin{pmatrix}1\\-\sin(\eta)\end{pmatrix} \tag{1.31}$$

Projektion der Bewegungsgleichungen eq. (1.30) auf $\vec{e}_\eta$ gibt (als Nebenrechnung verwenden wir $\ddot{x} = \ddot{\eta}$ und $\ddot{y} = -\cos(\eta)\dot{\eta}^2 - \sin(\eta)\ddot{\eta}$):

$$m\begin{pmatrix}\ddot{\eta}\\-\cos(\eta)\dot{\eta}^2 - \sin(\eta)\ddot{\eta}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2(\eta)}}\begin{pmatrix}1\\-\sin(\eta)\end{pmatrix} = -mg\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2(\eta)}}\begin{pmatrix}1\\-\sin(\eta)\end{pmatrix} + 0$$

$$\left(\ddot{\eta} + \cos(\eta)\sin(\eta)\dot{\eta}^2 + \sin^2(\eta)\ddot{\eta}\right) = g\sin(\eta)$$

$$\ddot{\eta} = \frac{\sin(\eta)\left[g - \cos(\eta)\dot{\eta}^2\right]}{1+\sin^2(\eta)}$$

1.4 HANTEL

(a) Die skleronome holonome Zwangsbedingung lautet

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0 \tag{1.32}$$

Sie reduziert die ursprünglichen 6 Freiheitsgrade auf 5.

(b) Es gibt keine Zwangsbedingung; alle 6 Freiheitsgrade bleiben erhalten.