3. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 14.12.2021

3

3.1 PERLE AUF EINEM ROTIERENDEN STAB

a) Wir benützen die radiale Position $\rho(t)$ der Perle als generalisierte Koordinate. Die Koordinaten (x,y), der xy-Ebene in der der Stab rotiert, schreiben wir mithilfe von $\rho(t)$ um:

$$x(t) = \rho(t)\cos(\phi(t)) \tag{3.1}$$

$$y(t) = \rho(t)\sin(\phi(t)) \tag{3.2}$$

Wir nehmen an $V = \text{constant}$. Jetzt können wir die kinetische Energie T ausrechnen:

$$T = \frac{m}{2}[\dot{x}^2 + \dot{y}^2] \tag{3.3}$$

$$= \frac{m}{2}[(\dot{\rho}(t)\cos\phi(t)) - \rho(t)\sin\phi(t)\dot{\phi}(t))^2 \tag{3.4}$$

$$+ (\dot{\rho}(t)\sin\phi(t) + \rho(t)\cos\phi(t)\dot{\phi}(t))^2] \tag{3.5}$$

$$= \frac{m}{2}[\dot{\rho}(t)^2 + \rho(t)^2\dot{\phi}(t)^2] \tag{3.6}$$

Daraus folgt die Lagrangefunktion:

$$L = T - V = \frac{m}{2}[\dot{\rho}(t)^2 + \rho(t)^2\dot{\phi}(t)^2], \tag{3.7}$$

mit V = 0.

b) Die Bewegungsgleichung für die Perle folgt aus der Euler-Lagrange Gleichung:

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}(t)}\right) - \frac{\partial L}{\partial \rho(t)} \tag{3.8}$$

$$= m\ddot{\rho}(t) - m\rho(t)\dot{\phi}(t)^2 \tag{3.9}$$

Mit $\phi(t) = \omega t$ folgt:

$$\ddot{\rho}(t) - \rho(t)\omega^2 = 0 \tag{3.10}$$

Diese Gleichung kann mit einem Exponentialansatz gelöst werden:

$$\rho(t) = Ce^{\alpha t} \tag{3.11}$$

Einsetzen gibt:

$$\alpha = \pm\sqrt{\omega^2} \tag{3.12}$$

Die Lösung lautet dann:

$$\rho(t) = C_1 e^{-\omega t} + C_2 e^{\omega t} \tag{3.13}$$

Mit Anfangsbedingungen kann man die Konstanten C_1 und C_2 explizit berechnen. z.B. $\rho(0) = \rho_0$ und $\dot{\rho}(0) = 0$ ergibt

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{2}(e^{-\omega t} + e^{\omega t}) \tag{3.14}$$

$$= \rho_0 \cosh(\omega t). \tag{3.15}$$

3.2 NOETHER UND EIN STEIN

a) Zyklische Koordinaten sind solche, von denen die Lagrangefunktion nicht explizit abhängt. Für unsere Lagrangefunktion

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz \tag{3.16}$$

sind dies x und y. Die zugehörigen kanonischen Impulse ergeben sich zu

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \tag{3.17}$$

Diese sind die wohlbekannten erhaltenen Impulse.

b) Mit der Transformation $z \to z + h \Rightarrow \dot{z} \to d/dt(z + h) = \dot{z}$ ergibt sich folgende transformierte Lagrangefunktion $\tilde{L}$:

$$\tilde{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz - mgh = L + \frac{dF}{dt} \tag{3.18}$$

Hieraus lesen wir ab:

$$F = -mght \tag{3.19}$$

3.3 GRAVITATION IN 2D

a) In der Lagrangefunktion taucht θ nicht auf, und ist daher eine zyklische Koordinate. Der assoziiert generalisierte Impuls ist der Drehimpuls

$$L_z = \frac{dL}{d\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \tag{3.20}$$

und die zugrunde liegende Symmetrie die Rotationssymmetrie um die z Achse.

Um die Euler-Lagrange Gleichungen anzuschreiben, benötigen wir die folgenden Ableitungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{d}{dt}m\dot{r} = m\ddot{r} \tag{3.21}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt}mr^2\dot{\theta} = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - m\frac{K}{r^2} \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \tag{3.24}$$

Dies führt dann zu den Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + m\frac{K}{r^2} = 0 \tag{3.25}$$

$$2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = 0 \tag{3.26}$$

b) Wir setzen Gleichung 3.20 in Gleichung 3.25 ein (L_z ist konstant) und erhalten:

$$m\ddot{r} - \frac{L_z^2}{mr^3} + m\frac{K}{r^2} = 0. \tag{3.27}$$

Vergleicht man diese Gleichung mit Newtons 2. Axiom, so identifiziert man

$$F(r) = \frac{L_z^2}{mr^3} - m\frac{K}{r^2}.$$

Diese lässt sich als Ableitung $F = -\partial V/\partial r$ des Potentials

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L_z^2}{2mr^2} - m\frac{K}{r} \tag{3.28}$$

schreiben.

3.4 TEILCHEN IM ELEKTROMAGNETISCHEN FELD

a) In kartesischen Koordinaten gibt es in der Lagrangefunktion keine zyklische Koordinate. Die Lagrangefunktion in Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) lautet

$$L(r, \phi, z, \dot{r}, \dot{\phi}, \dot{z}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + eEz + \frac{eB}{2}r^2\dot{\phi} \tag{3.29}$$

wobei wir nun ϕ als zyklische Koordinaten identifizieren. Der dazugehörige kanonische Impuls ist

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} + \frac{eB}{2}r^2. \tag{3.30}$$

b) Die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0 \tag{3.31}$$

liefert folgende Bewegungsgleichungen für r, ϕ und z:

$$\ddot{r} = r(\dot{\phi}^2 + \frac{eB}{m}\dot{\phi}) \tag{3.32}$$

$$\ddot{\phi} = -2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\phi} - \frac{eB}{m}\frac{\dot{r}}{r} \tag{3.33}$$

$$\ddot{z} = \frac{eE}{m} \tag{3.34}$$

c) Die Lagrangefunktionen sollen sich um eine totale Zeitableitung unterscheiden:

$$\tilde{L}(x, y, z, v_x, v_y, v_z) - L(x, y, z, v_x, v_y, v_z) = \frac{eB}{2}(x\dot{y} + y\dot{x}) \stackrel{!}{=} \frac{dF}{dt} \tag{3.35}$$

Berücksichtigen der Produktregel führt mit $c \in \mathbb{R}$ zu:

$$F = \frac{eB}{2}xy + c \tag{3.36}$$