6. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 25.1.2022

6

Photo by Chris Lawton on unsplash

6.1 EIN STEIN MIT KANONISCHEN TRANSFORMATIONEN

Wieder dient uns der Stein im uniformen Gravitationsfeld

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + mgq. \tag{6.1}$$

als einfaches Beispiel. Wir wollen zu neuen kanonischen Variablen $(\bar{q},\bar{p})$ transformieren, und zwar

$$\bar{q}(q,p) = ap, \qquad \bar{p}(q,p) = \frac{p^2}{2m} + mgq \tag{6.2}$$

a) Wie können Sie zeigen, dass eine Transformation zu neuen Variablen kanonisch ist? Berechnen Sie die Poisson Klammer $\{\bar{q},\bar{p}\}$ und bestimmen Sie a, sodass die Transformation auf $(\bar{q},\bar{p})$ kanonisch ist.

b) Konstruieren Sie eine Typ 1 Funktion $F_1(q,\bar{q})$, sodass

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \qquad \bar{p} = -\frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}}.$$

c) Machen Sie eine Legendretransformation

$$F_2(q,\bar{p}) = F_1(q,\bar{q}(q,\bar{p})) + \bar{p}\bar{q}(q,\bar{p})$$

und berechnen Sie $F_2(q,\bar{p})$.

6.2 EIN STEIN MIT KANONISCHEN TRANSFORMATIONEN II

Gegeben Sei die erzeugende Funktion

$$F_2(q,\bar{p}) = \frac{2}{3g}\sqrt{\frac{2}{m}}\,(\bar{p} - mgq)^{3/2}. \tag{6.3}$$

a) Berechnen Sie p und $\bar{q}$ aus den Ableitungen von F_2 und überprüfen Sie, ob F_2 die Transformation

$$\bar{q}(q,p) = -\frac{p}{mg}, \qquad \bar{p}(q,p) = \frac{p^2}{2m} + mgq$$

erzeugt.

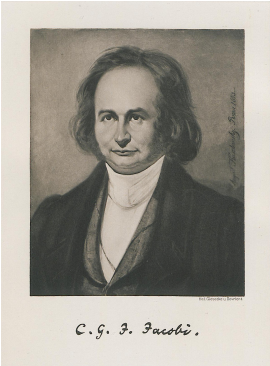
b) Ersetzen Sie in der Hamiltonfunktion

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + mgq \tag{6.4}$$

die Variablen (q,p) durch $(\bar{q},\bar{p})$. Lösen Sie die Bewegungsgleichungen!

c) Bestimmen Sie aus den Lösungen für $(\bar{q},\bar{p})$ die Lösungen für (q,p) und bringen Sie diese auf eine bekannte Form.

6.3 EIN STEIN MIT HAMILTON JACOBI



Carl Gustav Jacob Jacobi

Auch als letztes Beispiel dieses Semester betrachten wir einen Stein im uniformen Gravitationsfeld

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + mgz. \tag{6.5}$$

a) Geben Sie in eigenen Wort an, wie man ein Beispiel mit Hilfe des Hamilton-Jacobi-Formalismus löst.

b) Schreiben Sie die Hamilton-Jacobi Gleichung für Gl. (6.5) an. Zeigen Sie, dass die Gleichung wie folgt separierbar ist

$$S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t) = W_x(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) + W_y(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) + W_z(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) - Et$$

und lösen Sie zuerst für die x und y Komponente. Diese Gleichungen können Sie sofort unabhängig voneinander integrieren.

c) Zeigen Sie, dass die z-Komponente als

$$\left(\frac{\partial W_z}{\partial z}\right)^2 + 2m^2 gz = \alpha_3^2$$

geschrieben werden kann. Drücken Sie nun E als Funktion von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ aus. Berechnen Sie die Hamiltonsche Prinzipalfunktion S, und ersetzen Sie E durch den gefunden Ausdruck. Setzen Sie die Integrationskonstanten in S Null.

d) Berechnen Sie nun die Ableitungen

$$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$$

und lösen diese nach x, y und z auf. Bringen Sie die Gleichungen auf die Form $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0$ beziehungsweise $z(t) = -gt^2/2 + v_z t + z_0$.

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):
6.1 a b / 6.1 c / 6.2 / 6.3 a b / 6.3 c / 6.3 d