# 3. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 10.01.2023

3

## 3.1 PHASENRAUMPORTRÄTS

Ein Teilchen der Masse $m$ bewege sich in einer Raumdimension unter Einfluss des folgenden Potentials:

$$V(x) = V_0 x^2 e^{-\alpha x^2}, \quad V_0 \in \mathbb{R}_+, \alpha \in \mathbb{R}_+ \tag{3.1}$$

*a)* Skizzieren sie das Potential $V(x)$ des Systems und bestimmen sie die Gleichgewichtspositionen $x_G$ des Systems (i.e. die Extremalstelle von $V(x)$).

*b)* Stellen sie die Lagrangefunktion des Systems auf und führen Sie eine Legendre Transformation durch um die Hamiltonfunktion des Systems zu bestimmen.

*c)* Bestimmen sie das Hamiltonsche Vektorfeld $v_H(x, p)$ und visualisieren sie es in einem Phasenraumportät. Beschreiben Sie anhand dieses Porträts verbal die Bewegung des Teilchens in der Nähe der Gleichgewichtspositionen $x_G$ sowie für $x > \sqrt{1/a}$.

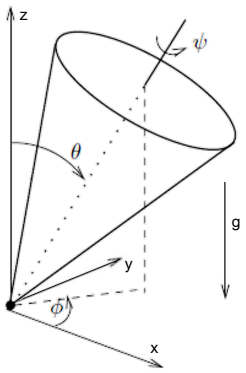
Hinweis zu c): Setzen sie $V_0 = 1$, $a = 1$ und zeichnen sie einzelne Pfeile des Vektorfelds für ein Raster von $x \in [-2, 2]$ und $p \in [-2, 2]$. Kontrollieren/Verfeinern Sie ihre Handskizze danach mit Hilfe von e.g. `https://www.geogebra.org/m/QPE4PaDZ`.

## 3.2 DER SYMMETRISCHE KREISEL

Beschrieben durch die Eulerwinkel $\theta, \psi, \phi$ ist die Hamiltonfunktion des symmetrischen Kreisels mit fixem Auflagepunkt im homogenen Gravitationsfeld gegeben durch:

$$H(\theta, \phi, \psi, p_\theta, p_\phi, p_\psi) = \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{p_\phi^2}{2I_1} \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + gm\cos(\theta) \tag{3.2}$$

$I_1$ und $I_3$ sind dabei Trägheitsmomente um die relevanten Achsen und $m$ sei die Masse des Kreisels.

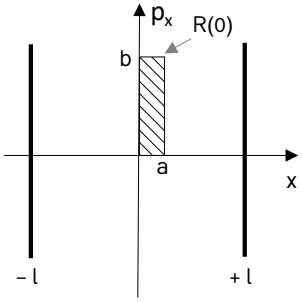



*a)* Identifizieren Sie alle zyklischen Koordinaten des Systems. Welche Erhaltungsgrößen sind damit verknüpft?

*b)* Wir betrachten einen Unterraum aller Lösungen der durch gleichsetzen der Konstanten der Bewegung $p_\phi$ und $p_\psi$ mit $p_\phi = p_\psi = p$ charakterisiert ist. Damit erhalten wir ein effektives eindimensionales Problem. Identifizieren Sie ein effektives Potential $V(\theta)$ und skizzieren sie dieses für verschiedene Werte von $p < p_c$, $p = p_c$, $p > p_c$ ($p_c = \sqrt{4gmI_1}$). Setzen Sie die restlichen Variablen alle auf 1, es geht hier nur um den qualitativen Verlauf des Potentials). Welche Änderung der Extremalstellen dieses Potentials als Funktion von $p$ beobachten Sie? Interpretieren Sie dies physikalisch.

*c)* Bestimmen Sie das Hamiltonsche Vektorfeld $v_H(\theta, p_\theta)$ und visualisieren sie es in einem Phasenraumportät für die beiden Fälle $p < p_c$ und $p > p_c$. Beschreiben anhand dieses Porträts verbal die möglichen Bewegungen des Kreisels.

### 3.3 HAMILTONSCHE DYNAMIK




Betrachten Sie ein freies Teilchen (i.e V(x)=0) der Masse $m = 1$ (in einer Dimension) in einer Box mit perfekt reflektierenden Wänden an $x = \pm l$. Wir interessieren uns für die Zeitentwicklung einer Region $\mathcal{R}$ im Phasenraum (x,p). $\mathcal{R}$ sei dabei zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Rechteck mit Eckkoordinaten $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$, $(a, b)$, siehe Skizze.

*a)* Schreiben Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen an und lösen Sie diese für 4 Anfangsbedingungen die die 4 Eckpunkte von $\mathcal{R}(t = 0)$ darstellen für Zeiten $t < l/b$.

*b)* Für Zeiten $t > l/b$ müssen sie entsprechende Vorzeichenwechsel des Impulses berücksichtigen (elastische Reflexion). Zeichnen sie $\mathcal{R}(t)$ für Zeiten $t = 0$, $t = \frac{l}{2b}$, $t = \frac{3l}{2b}$ und $t = \frac{7}{2b}$. Beschreiben sie ihre Skizzen verbal.

*c)* Berechnen sie den in $\mathcal{R}(t)$ eingeschlossenen Flächeninhalt für $t > 0$? Wie und warum ändert sich $\mathcal{R}(t)$ (nicht) ?

### 3.4 POISSON KLAMMERN

*a)* Berechnen sie die Poisson Klammern für die Drehimpulse $j_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\beta p_\gamma$ mit den Impulsen $p_\lambda$ und mit den Positionen $x_\lambda$.

*b)* Durch innere Produkte lassen sich aus Impulsen und Positionen skalare Funktionen $\sum_\lambda x_\lambda x_\lambda$, $\sum_\lambda x_\lambda p_\lambda$ und $\sum_\lambda p_\lambda p_\lambda$ bilden. Werten sie deren Poissonklammern mit $j_\alpha$ aus.

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):
3.1 a / b / c / 3.2 ab / c / 3.3 ab / c / 3.4 ab