5. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 16.01.2024

5

Brunnen beim Schloss Belvedere

5.1 HAMILTON-JACOBI IM FREIEN FALL

In diesem Beispiel betrachten wir die Bewegung einer Punktmasse m im homogenen, konstanten Gravitationsfeld in der Nähe der Erdoberfläche, $V(z) = mgz$, mithilfe der Hamilton-Jacobi-Gleichung. Wir nehmen vorweg, dass die Bahnkurve in einer Ebene stattfindet und verwenden daher nur die Koordinaten x (horizontal) und z (vertikal).

a) Stellen Sie die Hamilton-Jacobi-Gleichung für die Prinzipalfunktion $S(x, z, t)$ auf.

b) Finden Sie einen geeigneten Separationsansatz für die Prinzipalfunktion $S(x, z, \alpha_x, \alpha_z, E, t)$ (beachten Sie etwaige zyklische Koordinaten) bzw. für die charakteristische Funktion $W(x, z, \alpha_x, \alpha_z)$.

Für zeitunabhängige Systeme ist die Energie E eindeutig durch die Konstanten α_i bestimmt. Im separablen Fall kann E mit einem der α_i identifiziert werden (ähnlich wie beim eindimensionalen harmonischen Oszillator, siehe Seite 96 im Vorlesungs-Skriptum). Hier identifizieren wir $E \equiv \alpha_z$.

c) Integrieren Sie die Hamilton-Jacobi-Gleichung (berücksichtigen Sie beim Wurzel-Ziehen beide Lösungen) und schreiben Sie die Prinzipalfunktion $S(x, z, \alpha_x, E, t)$ an.

d) Berechnen Sie die neuen generalisierten Koordinaten $\beta_x = \partial S/\partial \alpha_x$ und $\beta_E = \partial S/\partial E$ als Funktionen von (x, z, α_x, E, t).

e) Drücken Sie die alten Koordinaten x und z durch die neuen Koordinaten β_x und β_E sowie die Konstanten α_x und E und die Zeit t aus.

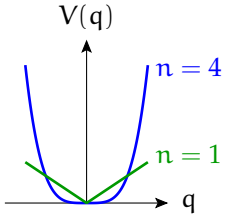
f) Berechnen Sie die Impulse $p_x = \partial S/\partial x$ und $p_z = \partial S/\partial z$ als Funktionen von (x, z, α_x, E, t). Was ist jeweils die physikalische Einheit und die physikalische Bedeutung von α_x, β_x und β_E?

g) Bestimmen Sie (am besten in der vorgegebenen Reihenfolge) die Konstanten α_x, E, β_E und β_x aus den Anfangsbedingungen $x(t = 0) = 0$, $z(t = 0) = 0$, $p_x(t = 0) = p_{x0}$, $p_z(t = 0) = p_{z0}$. Überlegen Sie, welches Vorzeichen für β_E infrage kommt. Betrachten Sie dazu den Ausdruck $\dot{z}(t = 0)$ mit dem z aus Unterpunkt *e)*.

h) Setzen Sie die soeben berechneten Konstanten in die in Unterpunkt *e)* ermittelten Ausdrücke für x und z ein, um die Bahnkurve als Funktion der Anfangsbedingungen und der Zeit t zu erhalten.

5.2 WIRKUNGS- UND WINKELVARIABLEN

Gegeben sei das Potential $V(q) = a|q|^n$ mit $a \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}^+$.



a) Bestimmen Sie für eine vorgegebene Gesamtenergie E den Punkt der maximalen Auslenkung $q_m > 0$.

b) Ermitteln Sie die Wirkungsvariable

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p(q, H = E) dq, \tag{5.1}$$

indem Sie über einen geeigneten Bruchteil der Periode integrieren.
Hinweis: Verwenden Sie $\int_0^1 \sqrt{1 - x^n}\, dx =: C_n \in \mathbb{R}^+$.

c) Berechnen Sie die Periodendauer $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\dot{\theta}$ mithilfe der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.
Hinweis: Verwenden Sie folgende Identität: Wenn $x = f^{-1}(y)$ die Umkehrung von $y = f(x)$ ist, dann gilt $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{1}{\left.\frac{\partial f^{-1}(y)}{\partial y}\right|_{y=f(x)}}$, oder in Kurzschreibweise: $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\partial x / \partial y}$.

d) Drücken Sie im Ausdruck für die Periodendauer T die Energie E durch den Umkehrpunkt q_m aus und diskutieren Sie die q_m-Abhängigkeit von T für $n \in \{1, 2, 4\}$.

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):
5.1 *ab* / 5.1 *c* / 5.1 *d* / 5.1 *e* / 5.1 *fg* / 5.1 *h* / 5.2 *ab* / 5.2 *cd*