5. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 16.01.2024

5

Brunnen beim Schloss Belvedere

5.1 HAMILTON-JACOBI IM FREIEN FALL

In diesem Beispiel betrachten wir die Bewegung einer Punktmasse m im homogenen, konstanten Gravitationsfeld in der Nähe der Erdoberfläche, $V(z) = mgz$, mithilfe der Hamilton-Jacobi-Gleichung. Wir nehmen vorweg, dass die Bahnkurve in einer Ebene stattfindet und verwenden daher nur die Koordinaten x (horizontal) und z (vertikal).

a) Stellen Sie die Hamilton-Jacobi-Gleichung für die Prinzipalfunktion $S(x, z, t)$ auf.

b) Finden Sie einen geeigneten Separationsansatz für die Prinzipalfunktion $S(x, z, \alpha_x, \alpha_z, E, t)$ (beachten Sie etwaige zyklische Koordinaten) bzw. für die charakteristische Funktion $W(x, z, \alpha_x, \alpha_z)$.

Für zeitunabhängige Systeme ist die Energie E eindeutig durch die Konstanten α_i bestimmt. Im separablen Fall kann E mit einem der α_i identifiziert werden (ähnlich wie beim eindimensionalen harmonischen Oszillator, siehe Seite 96 im Vorlesungs-Skriptum). Hier identifizieren wir $E \equiv \alpha_z$.

c) Integrieren Sie die Hamilton-Jacobi-Gleichung (berücksichtigen Sie beim Wurzel-Ziehen beide Lösungen) und schreiben Sie die Prinzipalfunktion $S(x, z, \alpha_x, E, t)$ an.

d) Berechnen Sie die neuen generalisierten Koordinaten $\beta_x = \partial S/\partial \alpha_x$ und $\beta_E = \partial S/\partial E$ als Funktionen von (x, z, α_x, E, t).

e) Drücken Sie die alten Koordinaten x und z durch die neuen Koordinaten β_x und β_E sowie die Konstanten α_x und E und die Zeit t aus.

f) Berechnen Sie die Impulse $p_x = \partial S/\partial x$ und $p_z = \partial S/\partial z$ als Funktionen von (x, z, α_x, E, t). Was ist jeweils die physikalische Einheit und die physikalische Bedeutung von α_x, β_x und β_E?

g) Bestimmen Sie (am besten in der vorgegebenen Reihenfolge) die Konstanten α_x, E, β_E und β_x aus den Anfangsbedingungen $x(t = 0) = 0$, $z(t = 0) = 0$, $p_x(t = 0) = p_{x0}$, $p_z(t = 0) = p_{z0}$. Überlegen Sie, welches Vorzeichen für β_E infrage kommt. Betrachten Sie dazu den Ausdruck $\dot{z}(t = 0)$ mit dem z aus Unterpunkt *e)*.

h) Setzen Sie die soeben berechneten Konstanten in die in Unterpunkt *e)* ermittelten Ausdrücke für x und z ein, um die Bahnkurve als Funktion der Anfangsbedingungen und der Zeit t zu erhalten.

Lösung:

a) Zum Aufstellen der Hamilton-Jacobi-Gleichung wird die Hamiltonfunktion des Systems benötigt:

$$H(x, z, p_x, p_z, t) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + mgz\,. \tag{5.1}$$

Die Hamilton-Jacobi-Gleichung lautet dann

$$\frac{\partial}{\partial t} S + H(x, z, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial z}, t) = 0\,, \tag{5.2}$$

wobei mit S immer $S(x, z, \alpha_x, \alpha_z, t)$ gemeint ist.

b) Als Erstes stellt man fest, dass die Hamiltonfunktion nicht zeitabhängig ist. Weiters ist die Koordinate x zyklisch. Eine hinreichende Bedingung für die komplette Separierbarkeit ist, dass $H \neq H(t)$ und dass $f - 1$ Koordinaten zyklisch sind. Dies ist hier erfüllt. Damit kann man die Prinzipalfunktion wie folgt schreiben:

$$S(x, z, \alpha_x, \alpha_z, t) = W_x(x, \alpha_x, \alpha_z) + W_z(z, \alpha_x, \alpha_z) - Et\,. \tag{5.3}$$

c) Wie in der Angabe behauptet, wird im Weiteren α_z mit der Energie E identifiziert. Setzt man nun (5.1) und (5.3) in (5.2) ein, so erhält man

$$-E + H(x, z, \frac{\partial W_x}{\partial x}, \frac{\partial W_z}{\partial z}, t) = 0 \tag{5.4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_x}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_z}{\partial z}\right)^2 + mgz = E\,. \tag{5.5}$$

Für zyklische Koordinaten sind die charakteristischen Funktionen linear und lauten $W_i(q_i, \vec{\alpha}) = \alpha_i q_i$. Um Verwirrung vorzubeugen, sei erwähnt, dass hier nicht mit der Summenkonvention gearbeitet wird. Damit vereinfacht sich (5.5) zu

$$\frac{\alpha_x^2}{2m} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_z}{\partial z}\right)^2 + mgz = E \tag{5.6}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial W_z}{\partial z} = \pm\sqrt{2m\left(E - mgz - \frac{\alpha_x^2}{2m}\right)}\,. \tag{5.7}$$

Integration liefert

$$W_z(z, \alpha_x, E) = \mp\frac{(2mE - \alpha_x^2 - 2m^2gz)^{3/2}}{3m^2g}\,, \tag{5.8}$$

wodurch sich die Prinzipalfunktion aus

$$S(x, z, \alpha_x, E, t) = \alpha_x x \mp \frac{(2mE - \alpha_x^2 - 2m^2gz)^{3/2}}{3m^2g} - Et \tag{5.9}$$

zusammensetzt.

d) Die neuen generalisierten Koordinaten lauten

$$\beta_x = \frac{\partial S}{\partial \alpha_x} = x \pm \alpha_x \frac{(2mE - \alpha_x^2 - 2m^2gz)^{1/2}}{m^2g}\,, \tag{5.10}$$

$$\beta_E = \frac{\partial S}{\partial E} = \mp\frac{(2mE - \alpha_x^2 - 2m^2gz)^{1/2}}{mg} - t\,. \tag{5.11}$$

e) Umformen von Gleichung (5.11) gibt

$$z = \frac{2mE - (\beta_E + t)^2 m^2 g^2 - \alpha_x^2}{2m^2 g}\,, \tag{5.12}$$

wobei das $\mp$ durch das Quadrieren verschwindet.

Setzt man in (5.10) nun den Bruch aus (5.11) ein und formt für x um, erhält man

$$x = \beta_x + \frac{\alpha_x(\beta_E + t)}{m}\,. \tag{5.13}$$

f) Ähnlich wie unter *d)* wird die Prinzipalfunktion partiell nun nach den Koordinaten abgeleitet, um die Impulse zu erhalten:

$$p_x = \partial S/\partial x = \alpha_x\,, \tag{5.14}$$

$$p_z = \partial S/\partial z = \pm\sqrt{2mE - \alpha_x^2 - 2m^2 g z}\,. \tag{5.15}$$

Die Einheit der Prinzipalfunktion ist in SI-Einheiten kg m^2 s^{-1} (eine [Wirkung] ist Energie mal Zeit und somit Js). Somit ist $[\alpha_x]$ = kg m s^{-1}, was einem Impuls entspricht (vgl. Gleichung (5.14)). $[\beta_x]$ hat die Einheit m und $[\beta_E]$ ist in der Einheit s. Diese stellen jeweils die neuen generalisierten Koordinaten dar. Außerdem erkennt man aus den Gleichungen (5.12) und (5.13), dass die Konstanten β_x und β_E die Ursprünge in den Koordinaten x bzw. t festlegen.

g) Zusammengefasst haben wir bereits folgende Gleichungen:

$$x(t) = \beta_x + \frac{\alpha_x(\beta_E + t)}{m}\,, \tag{5.16}$$

$$z(t) = \frac{2mE - (\beta_E + t)^2 m^2 g^2 - \alpha_x^2}{2m^2 g}\,, \tag{5.17}$$

$$p_x(t) = \alpha_x\,, \tag{5.18}$$

$$p_z(t) = \pm\sqrt{2mE - \alpha_x^2 - 2m^2 g \cdot z(t)}\,. \tag{5.19}$$

Mit den Anfangsbedingungen ergibt sich daraus:

$$x(0) = 0 \Rightarrow 0 = \beta_x + \frac{\alpha_x \beta_E}{m}\,, \tag{5.20}$$

$$z(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{2mE - \beta_E^2 m^2 g^2 - \alpha_x^2}{2m^2 g}\,, \tag{5.21}$$

$$p_x(0) = p_{x0} \Rightarrow p_{x0} = \alpha_x\,, \tag{5.22}$$

$$p_z(0) = p_{z0} \Rightarrow p_{z0} = \pm\sqrt{2mE - \alpha_x^2 - 2m^2 g \cdot z(0)}\,. \tag{5.23}$$

α_x ist bereits aus Gleichung (5.22) abzulesen. Aus Gleichung (5.23) lässt sich mit $z(0) = 0$ die Energie E berechnen. Gleichung (5.21) gibt

nach Umformen β_E, welches in Gleichung (5.20) eingesetzt auch β_x berechnen lässt. Zusammengefasst erhält man:

$$\alpha_x = p_{x0}\,, \tag{5.24}$$

$$E = \frac{p_{x0}^2 + p_{z0}^2}{2m}\,, \tag{5.25}$$

$$\beta_E = \pm\frac{p_{z0}}{mg} = -\frac{p_{z0}}{mg}\,, \tag{5.26}$$

$$\beta_x = \frac{p_{x0}p_{z0}}{m^2 g}\,. \tag{5.27}$$

Wichtig ist das Vorzeichen nach dem Wurzelziehen für Gleichung (5.26). Aus der zeitlichen Ableitung für $\dot{z}(t=0) = -\beta_E g$ aus Gleichung (5.17) und dem Wissen über $p_{z0} \cdot \dot{z}(t=0) \geqslant 0$, also der Bedingung der selben Richtung von Geschwindigkeit und Impuls, folgt

$$p_{z0} \cdot \dot{z}(t=0) = -p_{z0}\beta_E g \geqslant 0\,.$$

Man erkennt: Nur für $\beta_E = -\frac{p_{z0}}{mg}$ wird die Ungleichung für reelle p_{z0} erfüllt.

h) Einsetzen von den Ergebnissen (5.24) – (5.27) in $x(t)$ ergibt

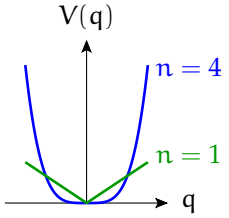
$$\begin{aligned} x(t) &= \beta_x + \frac{\alpha_x(\beta_E + t)}{m} = \frac{p_{x0}p_{z0}}{m^2 g} + \frac{p_{x0}(-\frac{p_{z0}}{mg} + t)}{m} \\ &= \frac{p_{x0}t}{m}\,, \end{aligned} \tag{5.28}$$

sowie für $z(t)$:

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{2mE - (\beta_E + t)^2 m^2 g^2 - \alpha_x^2}{2m^2 g} = \frac{p_{z0}^2 - (-\frac{p_{z0}}{mg} + t)^2 m^2 g^2}{2m^2 g} \\ &= \frac{p_{z0}^2 - (tmg - p_{z0})^2}{2m^2 g} = \frac{-t^2 m^2 g^2 + 2tmgp_{z0}}{2m^2 g} \\ &= \frac{p_{z0}}{m}t - \frac{g}{2}t^2\,. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Das sind die bekannten Bewegungsgleichungen mit Anfangs-Impulsen statt Anfangs-Geschwindigkeiten.

Gegeben sei das Potential $V(q) = a|q|^n$ mit $a \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}^+$.



a) Bestimmen Sie für eine vorgegebene Gesamtenergie E den Punkt der maximalen Auslenkung $q_m > 0$.

b) Ermitteln Sie die Wirkungsvariable

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p(q, H = E) dq, \tag{5.30}$$

indem Sie über einen geeigneten Bruchteil der Periode integrieren.
Hinweis: Verwenden Sie $\int_0^1 \sqrt{1 - x^n}\, dx =: C_n \in \mathbb{R}^+$.

c) Berechnen Sie die Periodendauer $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\dot{\theta}$ mithilfe der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.
Hinweis: Verwenden Sie folgende Identität: Wenn $x = f^{-1}(y)$ die Umkehrung von $y = f(x)$ ist, dann gilt $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{1}{\left.\frac{\partial f^{-1}(y)}{\partial y}\right|_{y=f(x)}}$, oder in Kurzschreibweise: $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\partial x/\partial y}$.

d) Drücken Sie im Ausdruck für die Periodendauer T die Energie E durch den Umkehrpunkt q_m aus und diskutieren Sie die q_m-Abhängigkeit von T für $n \in \{1, 2, 4\}$.

Lösung:

a) Der Hamiltonian des Problems ist

$$H = \frac{p^2}{2m} + a|q|^n\,. \tag{5.31}$$

Die Zeitunabhängigkeit impliziert Erhaltung der Gesamtenergie $E = H$. Der Punkt der maximalen Auslenkung ist erreicht, wenn die potentielle Energie maximal, also die kinetische minimal ($p = 0$) ist:

$$H(q_m, p = 0) = a|q_m|^n = E \tag{5.32}$$

$$\Rightarrow q_m = \left(\frac{E}{a}\right)^{1/n}. \tag{5.33}$$

b) Bestimmen wir zuerst den Impuls, abhängig von Ort und Gesamtenergie:

$$p(q, H = E) = \pm\sqrt{2m(E - a|q|^n)}\,. \tag{5.34}$$

Da das Potential für alle n symmetrisch ist, kann das Integral der Wirkungsvariable in vier gleich große Teile (etwa Intervall 0 bis q_m) geteilt werden. Bei der Integration von 0 bis q_m ist $q \geqslant 0$, also $|q| = q$. Außerdem muss die positive Lösung für den Impuls verwendet werden.

Das Intergral ergibt

$$I = 4\frac{1}{2\pi}\int_0^{q_m} dq\sqrt{2m(E - aq^n)} \tag{5.35}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{q_m} dq\sqrt{2mE}\sqrt{1 - \frac{a}{E}q^n} \tag{5.36}$$

$$= \frac{2}{\pi}\sqrt{2mE}\left(\frac{E}{a}\right)^{1/n}\int_0^{\xi_m=1} d\xi\sqrt{1 - \xi^n} \tag{5.37}$$

$$= C_n\frac{2}{\pi}\sqrt{2m}a^{-\frac{1}{n}}E^{\frac{1}{n}+\frac{1}{2}}\,. \tag{5.38}$$

c) Die Periodendauer kann über die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen und mithilfe des Hinweises aus der Angabe berechnet werden:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} = \frac{2\pi}{\frac{\partial H}{\partial I}} = 2\pi\frac{\partial I}{\partial E}$$

$$= 4C_n\sqrt{2m}a^{-\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}\,. \tag{5.39}$$

d) Setzt man in (5.39) den Ausdruck $E = aq_m^n$ ein, erhält man

$$T = \frac{4C_n\sqrt{2m}}{\sqrt{a}}\frac{n+2}{2n}(q_m)^{1-\frac{n}{2}}\,. \tag{5.40}$$

Für $n = 1$ ist $T \propto \sqrt{q_m}$. Die Periodendauer nimmt also für größere Auslenkungen zu.

$n = 2$ stellt genau einen Grenzfall dar, denn $T = \text{const}$ in Bezug auf q_m. Die Periodendauer ist also unabhängig von der Auslenkung. Der Fall $n = 2$ entspricht einem harmonischen Oszillator, für welchen die Schwingungsdauer unabhängig von der Amplitude ist. Unsere Ergebnisse sind in dieser Hinsicht also physikalisch sinnvoll.

Für $n = 4$ ist $T \propto \frac{1}{q_m}$. Das Potential ist nun also so steil, dass größere Auslenkungen dazu führen, dass unsere Punktmasse die Periode schneller durchläuft.

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):
5.1 *ab* / 5.1 *c* / 5.1 *d* / 5.1 *e* / 5.1 *fg* / 5.1 *h* / 5.2 *ab* / 5.2 *cd*