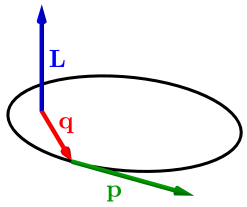
6. TUTORIUM ANALYTISCHE MECHANIK VU, 23.01.2024

6

6.1 ALLGEMEINE EIGENSCHAFTEN ISOTROPER ZWEI-KÖRPER-WECHSELWIRKUNGEN

Wir betrachten ein zu einem Zwei-Körper-Problem äquivalentes Ein-Körper-Problem mit isotroper Wechselwirkung. Die Hamiltonfunktion ist

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + U(|\mathbf{q}|) . \tag{6.1}$$



Zeigen Sie:

a) Die Kraft $\mathbf{F} = -\frac{\partial U(|\mathbf{q}|)}{\partial \mathbf{q}}$ wirkt radial, d.h. $\mathbf{F} \parallel \mathbf{q}$.

b) Der Drehimpuls $\mathbf{L} := \mathbf{q} \times \mathbf{p}$ ist eine Erhaltungsgröße.

c) Die Bahnkurve befindet sich in einer Ebene, die senkrecht zum Drehimpuls liegt.

Lösung:

a) Das isotrope Potential U hängt lediglich vom Betrag der Koordinate $\mathbf{q}$ ab und somit folgt unter Verwendung der Kettenregel

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U(|\mathbf{q}|)}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial U(\xi)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=|\mathbf{q}|} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}(|\mathbf{q}|) = -\frac{\partial U(\xi)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=|\mathbf{q}|} \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} \parallel \mathbf{q} . \tag{6.2}$$

b) Die totale Zeitableitung des Drehimpulses $\mathbf{L}$ ist gegeben durch

$$\dot{\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{p} + \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{p}} . \tag{6.3}$$

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen lauten

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{\mu} , \tag{6.4}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} \parallel \mathbf{q} , \tag{6.5}$$

womit sich durch Einsetzen ergibt:

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{\mathbf{p}}{\mu} \times \mathbf{p} - \mathbf{q} \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0} . \tag{6.6}$$

c) Der Drehimpuls ist in Betrag und Richtung zeitlich konstant. Aus

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{q} \cdot \underbrace{(\mathbf{q} \times \mathbf{p})}_{\perp \mathbf{q}} = 0 \tag{6.7}$$

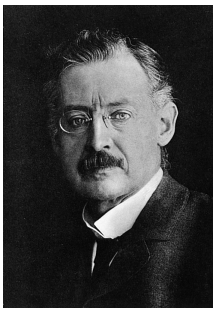
folgt, dass die Bahnkurve stets in einer Ebene senkrecht zu $\mathbf{L}$ liegt.

Wir betrachten für das Kepler- bzw. Coulomb-Problem mit dem Potential $U(r) = -\frac{K}{r}$ den Laplace-Runge-Lenz-Vektor

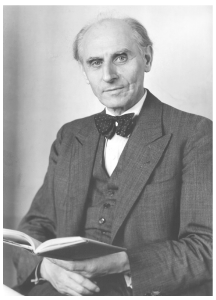
$$\mathbf{A} := \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{\mu K}{r}\mathbf{q}. \tag{6.8}$$

Dabei ist $\mathbf{L} := \mathbf{q} \times \mathbf{p}$ der Drehimpuls und $r := |\mathbf{q}|$. Man kann zeigen, dass $\mathbf{A}$ eine Erhaltungsgröße ist und dass $|\mathbf{A}| = \sqrt{\mu^2 K^2 + 2\mu L^2 E}$, wobei $L = |\mathbf{L}|$ der Betrag des Drehimpulses und $E = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{K}{r}$ die Gesamtenergie ist.

Pierre-Simon Laplace



Carl Runge



Wilhelm Lenz

a) Berechnen Sie das Skalarprodukt $\mathbf{q} \cdot \mathbf{A}$ mit Hilfe der Gleichung (6.8). Zeigen Sie, dass sich daraus über $\mathbf{q} \cdot \mathbf{A} = r\,|\mathbf{A}|\cos(\varphi)$ (wobei φ der Winkel zwischen $\mathbf{q}$ und $\mathbf{A}$ ist) die Bahngleichung

$$\frac{c}{r} = 1 + \varepsilon \cos(\varphi) \tag{6.9}$$

ergibt. Diese Gleichung beschreibt einen Kegelschnitt mit der Exzentrizität ε. Drücken Sie die Parameter c und ε durch die Konstante K, die reduzierte Masse μ, die Gesamtenergie E und den Betrag des Drehimpulses L aus. Wie hängt die Exzentrizität ε mit dem Betrag des Laplace-Runge-Lenz-Vektors, $|\mathbf{A}|$, zusammen?

b) Begründen Sie mithilfe der Gleichung (6.9), für welche Werte von ε eine gebundene Bewegung (eine beschränkte Bahnkurve) vorliegt. Für welche Werte der Energie E ist dies der Fall?

c) Überlegen Sie mithilfe der Definition des Winkels φ sowie der Bahngleichung (6.9), in welche Richtung der Vektor $\mathbf{A}$ zeigt.

Lösung:

a) Wir berechnen das Skalarprodukt $\mathbf{q} \cdot \mathbf{A}$ und verwenden dabei die Zyklizität des Spatproduktes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q} \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \frac{\mu K}{r}\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} && (6.10)\\
&= \mathbf{L} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) - \frac{\mu K}{r} r^2 && (6.11)\\
&= \mathbf{L}^2 - \mu K r \overset{!}{=} \underbrace{|\mathbf{q}|}_{r}\,|\mathbf{A}|\cos(\varphi)\,. && (6.12)
\end{aligned}$$

Nach Umformen der Gleichung ergibt sich:

$$\frac{\mathbf{L}^2}{\mu K r} = 1 + \frac{|\mathbf{A}|}{\mu K}\cos(\varphi)\,. \tag{6.13}$$

Die gesuchten Konstanten lassen sich direkt aus der Gleichung ablesen:

$$c = \frac{\mathbf{L}^2}{\mu K} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon = \frac{|\mathbf{A}|}{\mu K}\,. \tag{6.14}$$

b) Die Exzentrizität ε charakterisiert den Kegelschnitt, welcher der Bahnkurve entspricht.
Für $\varepsilon = 0$ entspricht dies einer Kreisbahn.
Für $0 < \varepsilon < 1$ entspricht dies einer Ellipse.
Für $\varepsilon = 1$ entspricht dies einer Parabel.
Für $\varepsilon > 1$ entspricht dies einer Hyperbel.
Für Werte von $0 \leqslant \varepsilon < 1$ liegt also eine gebundene Bewegung vor, weil in diesem Fall laut Gleichung (6.9) der Bahnradius r nicht divergiert.
Aus $\varepsilon < 1$ leiten wir nun eine Bedingung für die Energie ab:

$$\varepsilon = \frac{|\mathbf{A}|}{\mu K} < 1 \tag{6.15}$$

$$\iff |\mathbf{A}|^2 < \mu^2 K^2 \tag{6.16}$$

$$\iff \mu^2 K^2 + 2\mu L^2 E < \mu^2 K^2 \tag{6.17}$$

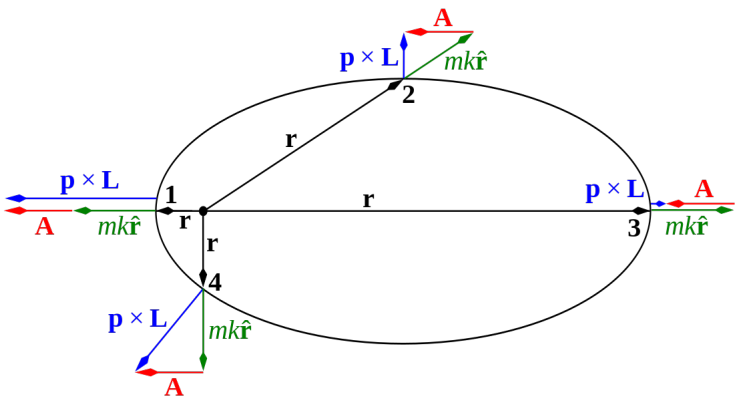
$$\iff E < 0\,. \tag{6.18}$$

$E < 0$ ist also die Bedingung für eine gebundene Bewegung.

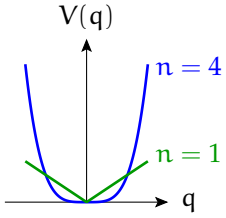
c) Der Laplace-Runge-Lenz-Vektor liegt in der Bahnebene, da er orthogonal zum Drehimpulsvektor steht:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - \frac{\mu K}{r} \mathbf{L} \cdot \mathbf{q} = 0\,. \tag{6.19}$$

Dabei haben wir verwendet, dass $\mathbf{a} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$. Nun betrachten wir die Bahngleichung (6.9) mit den positiven Konstanten $c > 0, 0 < \varepsilon < 1$. Für einen Winkel von $\varphi = 0$ ergibt sich, dass r minimal wird, da die rechte Seite der Gleichung maximal wird. Daraus lässt sich folgern, dass der Laplace-Runge-Lenz-Vektor am Perihel, dem nächstgelegenen Punkt zum Kraftzentrum, in Richtung des Ortsvektors zeigt. Da der Laplace-Runge-Lenz-Vektor eine Erhaltungsgröße ist, zeigt er immer parallel zur großen Halbachse in Richtung des Perihels, siehe Abbildung unten.



Laplace-Runge-Lenz-Vektor. Image Credit: Wikipedia



Gegeben sei, wie in Beispiel 5.2, das Potential $V(q) = a|q|^n$ mit $a \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}^+$. Sei $q_m > 0$ die maximale Auslenkung bei einer vorgegebenen Energie E und T die dazugehörige Periodendauer. Leiten Sie (für feste Werte von n) die q_m-Abhängigkeit von T her, indem Sie ausschließlich die Dilatationssymmetrie benutzen.

Lösung: Dilatationssymmetrie bedeutet, dass die Dynamik des Systems strukturell invariant unter den Skalentransformationen

$$q \rightarrow \lambda q\,, \tag{6.20}$$
$$t \rightarrow \beta t\,, \tag{6.21}$$

mit $\lambda > 0$ und $\beta > 0$ bleibt. Die maximale Auslenkung q_m transformiert wie die generalisierte Koordinate in Gleichung (6.20). Da die Periodendauer T die Einheit einer Zeit hat, skaliert sie wie die Zeit in Gleichung (6.21). Die neuen Koordinaten ergeben sich also über die Skalenrelationen

$$q'_m = \lambda q_m\,, \tag{6.22}$$
$$T' = \beta T\,. \tag{6.23}$$

Damit die Lagrangefunktion $L = T - V$ dilatationssymmetrisch ist und die Dynamik des Systems invariant unter diesen Transformationen bleibt, muss L homogen vom Grad n sein:

$$L = T - L \rightarrow \lambda^n L \stackrel{!}{=} \frac{\lambda^2}{\beta^2} T - \lambda^n V. \tag{6.24}$$

Für die kinetische Energie T wurde verwendet, dass die generalisierte Geschwindigkeit unter einer Dilatationstransformation der Skalierung

$$\dot{q} = \frac{d}{dt} q \rightarrow \frac{\lambda}{\beta} \frac{d}{dt} q = \frac{\lambda}{\beta} \dot{q} \tag{6.25}$$

folgt. Aus Gleichung (6.24) folgt, dass die Potenzen von λ der kinetischen Energie und des Potentials gleich sein müssen, wodurch sich der Zusammenhang für die Skalenfaktoren β und λ

$$\beta = \lambda^{1-\frac{n}{2}} \tag{6.26}$$

ergibt. Aus den Skalenrelationen (6.22) und (6.23) lässt sich mit diesem Zusammenhang die Abhängigkeit der Periodendauer von der maximalen Auslenkung anschreiben:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{T'}{T} = \lambda^{1-\frac{n}{2}} \\ \frac{q'_m}{q_m} = \lambda \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\frac{T'}{T}\right) = \left(\frac{q'_m}{q_m}\right)^{1-\frac{n}{2}}. \tag{6.27}$$

Die Abhängigkeit der Periodendauer T von q_m ist also die gleiche wie in Beispiel 5.2:

$$T \propto \sqrt{q_m} \qquad \text{für } n = 1\,, \tag{6.28}$$
$$T \propto \text{const.} \qquad \text{für } n = 2\,, \tag{6.29}$$
$$T \propto \frac{1}{q_m} \qquad \text{für } n = 4\,. \tag{6.30}$$

Betrachten Sie zwei wechselwirkende Teilchen der Massen m_1 und m_2 in einer Dimension, deren Hamiltonfunktion gegeben ist durch

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(q_1 - q_2). \tag{6.31}$$

a) Schreiben Sie die Hamiltonfunktion in den Schwerpunktskoordinaten (R, P) und Relativkoordinaten (q, p) an. Definieren Sie dabei alle auftretenden Größen. Welche der Variablen wird dabei zyklisch?

b) Ist diese Transformation kanonisch? Untermauern Sie Ihre Antwort, indem Sie explizit die Poissonklammern $\{R, P\}$, $\{q, P\}$, $\{R, p\}$ und $\{q, p\}$ berechnen.

Lösung:

a) Die Koordinatentransformationen für das Schwerpunktsystem lauten:

$$q = q_1 - q_2\,, \tag{6.32}$$
$$p = \frac{m_2 p_1 - m_1 p_2}{m_1 + m_2}\,, \tag{6.33}$$
$$R = \frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{m_1 + m_2}\,, \tag{6.34}$$
$$P = p_1 + p_2\,. \tag{6.35}$$

Im Potential können wir die Transformation gleich einsetzen und sehen, dass es nur noch von der neuen Koordinate q abhängt. Für die Impulse müssen wir uns p_1 und p_2 in Abhängigkeit von p und P ausdrücken:

$$P = p_1 + p_2 \Rightarrow p_2 = P - p_1\,, \tag{6.36}$$
$$p = \frac{m_2 p_1 - m_1(P - p_1)}{m_1 + m_2}\,, \tag{6.37}$$
$$(m_1 + m_2)p = (m_1 + m_2)p_1 - m_1 P\,, \tag{6.38}$$
$$p + \frac{m_1}{m_1 + m_2} P = p_1\,. \tag{6.39}$$

Analog dazu wird p_2 ausgedrückt und wir definieren $m_1 + m_2$ als die Gesamtmasse M:

$$p_2 = -p + \frac{m_2}{M} P\,. \tag{6.40}$$

Einsetzen in die kinetische Energie ergibt:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{(p + \frac{m_1}{M}P)^2}{2m_1} + \frac{(-p + \frac{m_2}{M}P)^2}{2m_2} \\
&= \frac{1}{2m_1}\left(p^2 + 2\frac{m_1}{M}pP + \frac{m_1^2}{M^2}P^2\right) + \frac{1}{2m_2}\left(p^2 - 2\frac{m_2}{M}pP + \frac{m_2^2}{M^2}P^2\right) \\
&= \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right)p^2 + \frac{1}{M}(pP - pP) + \frac{1}{2M^2}(m_1 + m_2)P^2 \\
&= \frac{m_1 + m_2}{2m_1 m_2}p^2 + \frac{1}{2M}P^2\,.
\end{aligned} \tag{6.41}$$

Mit der reduzierten Masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ ist die neue Hamiltonfunktion

$$\tilde{H}(R, P, q, p) = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{P^2}{2M} + V(q)\,. \tag{6.42}$$

Die Koordinate R ist zyklisch.

b) Damit die Transformation kanonisch ist, müssen folgende Bedingungen gelten:

$$\{R, q\} = \{R, p\} = \{q, P\} = \{P, p\} = 0\,, \tag{6.43}$$

$$\{R, P\} = \{q, p\} = 1\,. \tag{6.44}$$

Wir rechnen nun vier Fälle explizit durch:

$$\{R, P\} = \left\{\frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{M}, p_1 + p_2\right\} = \frac{1}{M}(m_1 + m_2) = 1\,, \tag{6.45}$$

$$\{q, P\} = \{q_1 - q_2, p_1 + p_2\} = 1 - 1 = 0\,, \tag{6.46}$$

$$\{R, p\} = \left\{\frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{M}, \frac{m_2 p_1 - m_1 p_2}{M}\right\} = \frac{1}{M^2}(m_1 m_2 - m_1 m_2) = 0\,, \tag{6.47}$$

$$\{q, p\} = \left\{q_1 - q_2, \frac{m_2 p_1 - m_1 p_2}{M}\right\} = \frac{1}{M}(m_2 + m_1) = 1\,. \tag{6.48}$$

Die reinen Orts- und Impuls-Poissonklammern, also $\{R, q\}$ und $\{P, p\}$, verschwinden augenscheinlich, weil die neuen Orts- bzw. Impulskoordinaten ausschließlich von den alten Orten bzw. Impulsen abhängen. Dadurch ersparen wir uns eine explizite Rechnung und können sogleich schlussfolgern, dass die Transformation kanonisch ist.

Zu kreuzen (online im TUWEL-Kurs zur LVA):
6.1 *a* / 6.1 *bc* / 6.2 *a* / 6.2 *b* / 6.2 *c* / 6.3 / 6.4 *a* / 6.4 *b*