Physikalische Großen, Maßeinheiten

Dimensionsprüfung

Aufgabe 1.
Zwei elektrisch nicht geladene Massen $m_1 = 1kg$ und $m_2 = 1g$ ziehen sich mit der Kraft von $10^{-14}N$ an.

Gesucht wird der Abstand zwischen den Massen. Dimensionsprüfung durchführen.
Lösung:

Gravitationskonstante G=6.67. $\cdot 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$, $1\ g = 10^{-3}\ kg$, $1N = 1\frac{kg \cdot m}{s^2}$
Gravitationsgesetz:

$$F = G\frac{m_1\ m_2}{R^2} \qquad \text{woraus} \qquad R = \sqrt{\frac{G\ m_1\ m_2}{F}} \quad \text{folgt}$$

Um zu prüfen, ob die Formel richtig ist, setzt man die Maßeinheiten statt der Größen in die Formel ein:

$$R = \sqrt{\frac{m^3\ kg^{-1}\ s^{-2} \cdot kg \cdot kg}{kg\ m\ s^{-2}}} = \sqrt{m^2} = m \quad \text{- richtige Einheit für den Abstand}$$

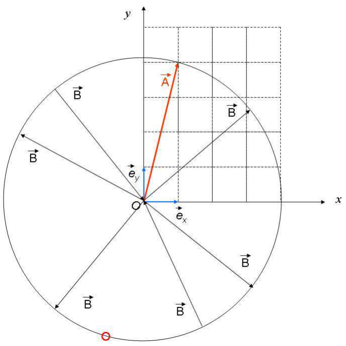
$$R = \sqrt{\frac{G\ m_1\ m_2}{F}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{-3} \cdot 1}{10^{-14}}} = 2.58\ (m)$$

Vektorrechnung

Aufgabe 2.
Es gebe einen Verktor $\vec{A} = \vec{e}_x + 4\vec{e}_y$

Gesucht werden andere Vektoren $\vec{B}$ in der $x - y$-Ebene, wobei $A = B$ aber $\vec{A} \neq \vec{B}$

Lösung:



Eine der Vorgehensweisen:

man zeichnet einen Kreis mit dem Radius $R = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$ und dem Mittelpunkt am Anfang des Vektors $\vec{A}$ und verbindet den Kreismittelpunkt mit einem beliebigen Punkt am Kreis (die schwarzen Vektoren). Auch die Verbindung in umgekehrter Richtung ist möglich. (Aufpassen mit dem zentralsymmetrischen Punkt zum Punkt (1, 4)!)

Aufgabe 3.

Es gebe zwei Verktoren $\vec{A} = 3\vec{e}_x + \vec{e}_y$ und $\vec{B} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y$.

Gesucht werden das Skalarprodukt, der Betrag und die Richtung des Vektorprodukts $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$.

Lösung:

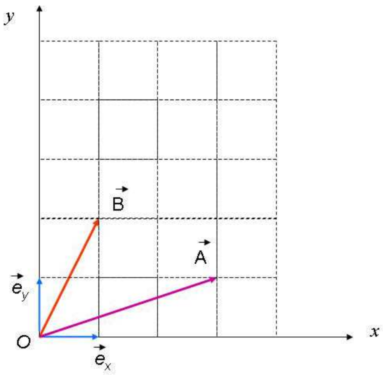
$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

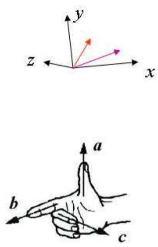
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 5$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\, \vec{e}_z\ (3 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = 5\ \vec{e}_z$$

Richtung $\vec{e}_z$, Betrag 5

Die Richtung mit Hilfe der Rechte-Hand-Regel überprüfen:





Aufgabe 4.

Es gebe einen Vektor $\vec{a} = cos\varphi\vec{e}_x + sin\varphi\vec{e}_y$.

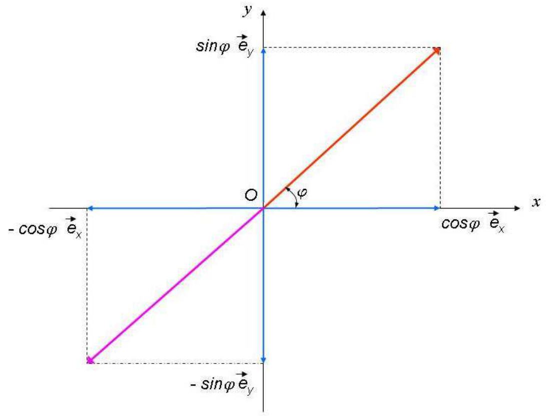
Gesucht werden die erste und die zweite Ableitungen von $\vec{a}$ nach φ.

Lösung:

Die Einheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ sind ortunabhängig $\Rightarrow$ Konstanten beim Differenzieren nach φ

$$\frac{d\vec{a}}{d\varphi} = -sin\varphi\ \vec{e}_x + cos\varphi\ \vec{e}_y$$

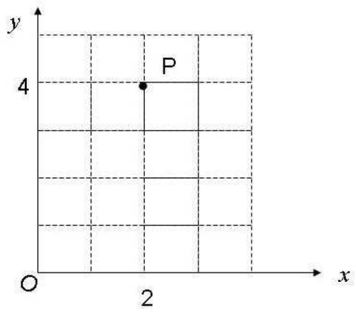
$$\frac{d^2\vec{a}}{d\varphi^2} = -cos\varphi\ \vec{e}_x - sin\varphi\ \vec{e}_y = -\vec{a}$$

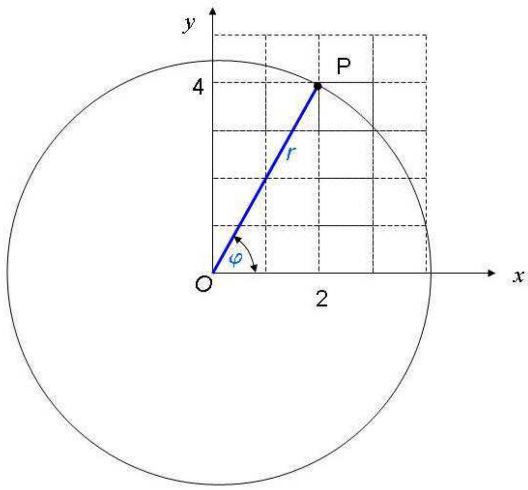


Koordinatensysteme

Aufgabe 5.
Es gebe einen Punkt mit kartesischen Koordinaten $P(2,\, 4)$

Gesucht werden die Polarkoordinaten von Punkt P.





Lösung:

Den Pol des Polarkoordinatensystems O wählen wir am Koordinatenursprung der kartesischen Koordinaten O.

$r = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 4.47$

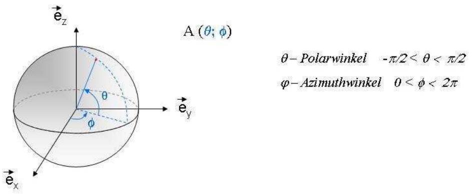
Aus dem Dreieck OP2

$tg\varphi = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \varphi = 63.4^\circ = 1.1\ (rad)$

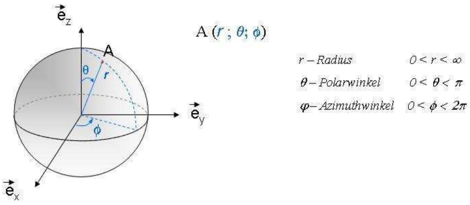
P(4.47, 1.1)

Aufgabe 6.
Die Stadt Wien hat folgende geographische koordinaten: Breite $48° N$, Länge $16° O$

Gesucht werden die Koordinaten von Wien im Kugelkoordinatensystem mit Ursprung im Erdmittelpunkt und der x-Achse, die den Nullmeridian schneidet.

Geokoordinaten 

.

Kugelkoordinaten 

Lösung:

Die erste Kugelkoordinate r ist der Abstand zwischen Wien und dem Erdemittelpunkt, ist gleich dem Erdradius, $r = 6370\ km = 6.37 \cdot 10^6\ m$ (die Abplattung der Erde vernachlässigen)

Der Polarwinkel θ wird nicht vom Äquator, sondern vom Nordpol abgezählt $\Rightarrow \theta = 90° - 48° = 42° = 0.733\ rad$

Der Asimuthwinkel ist in beiden Koordinatensystemen gleich definiert $\Rightarrow \varphi = 16° = 0.279\ rad$

$$W(6.37 \cdot 10^6,\ 0.733,\ 0.279)$$

Kinematik

Aufgabe 7.
Die Abhängigkeit der Position x eines Körpers von der Zeit t sei gegeben durch $x = At^2 - Bt + C$.

Gesucht wird die Momentangeschwindigkeit und die Beschleunigung als Funktionen der Zeit.
$A = 8m/s^2$, $B = 6m/s$, $C = 4m$.

Lösung:

$$x = 8t^2 - 6t + 4 \ (m)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 16t - 6 \ (m/s)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 16 \ m/s^2$$

$a = const \Rightarrow$ gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

Aufgabe 8.
Ein Körper werde konstant beschleunigt und habe bei $r = 6m$ die Geschwindigkeit $v = 10m/s$. Bei $r = 10m$ sei $v = 15m/s$.

Gesucht wird die Beschleunigung.

Lösung:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + at \qquad (1)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \qquad (2)$$

1D Fall, skalare Gleichungen verwenden.
Legen wir die Anfangsbedingungen fest: $r_0 = 6 \ m$, $v_0 = 10 \ m/s$. Nach eine Zeit t: $r = 10 \ m$, $v = 15 \ m/s$.
Bewegungsgleichungen:

$$15 = 10 + at \qquad (1')$$

$$10 = 6 + 10t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (2')$$

$$\text{aus } (1') \quad t = \frac{5}{a} \quad \Rightarrow \quad (2') \quad 4 = \frac{50}{a} + \frac{1}{2}a\ \frac{5^2}{a^2}$$

$$4 = \frac{62.5}{a} \qquad a = 15.625\ (m/s^2)$$

<u>Aufgabe 9.</u>
Ein kühner Mensch springe vom 170m hohen Milleniumtower in einen Heuhaufen.

Gesucht wird: Wie hoch müßte der Heuhaufen (Mindestbremsweg) sein, damit er überleben kann? (Verzögerungen über 20g sind lebenskritisch).

Lösung:

Annahmen: Das Heu hat eine optimale Dichte und ermöglicht das Bremsen mit einer konstanten (negativen) Beschleunigung. Der Luftwiderstand kann vernachlässigt werden

1) Beschleunigungsphase. Gesucht wird die Fallgeschwindigkeit knapp vor dem Boden.

$v = gt$ (1) (t - die Fallzeit)

$h = \frac{1}{2}gt^2$ (2) (h - die Höhe des Milleniumstowers)

Aus (2) $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$; setzen in (1) ein:

$v = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh} = 57.72\ (m/s)$

2) Bremsphase. Die Geschwindigkeit vermindert sich von $v = 57.72\ m/s$ bis 0 beim Durchgagn durch den Heuhaufen:

$a = \frac{v-0}{t'}$ (t' - die Bremszeit)

$t' = \frac{v}{a} = \frac{57.72}{20g} = \frac{57.72}{196.2} = 0.294\ (s)$

$h' = \frac{1}{2}at'^2$ (h' - die Höhe des Heuhaufens)

$h' = \frac{1}{2} \cdot 196.2 \cdot 0.294^2 = 8.5\ (m)$

$h' \ll h$, sonst müsste man die Gleichung $h - h' = \frac{1}{2}gt^2$ statt (2) verwenden.

Aufgabe 10.
Eine Ladung Steine werde von einem Kran mit $v = 5\,m/s$ nach oben gezogen. $6\,m$ über den Boden falle ein Stein heraus.

Gesucht werden die Fallzeit des Steines; die Geschwindigkeit vor dem Aufprall mit dem Boden.

Lösung:

1D Bewegung entlang der vertikelen z-Achse.
Anfangsbedingungen: $z_0 = \; 6\ m$, $v_0 = \; 5\ m/s$.
Bewegungsgleichungen: (NB: die Geschwindigkeit v_0 und die Beschleunigung g haben entgegengesetzte Richtungen bzw. Vorzeichen)

$$z = z_0 + v_0\ t - \frac{1}{2}\ g\ t^2 \quad (1) \quad \text{und} \quad v = v_0 - g\ t \quad (2)$$

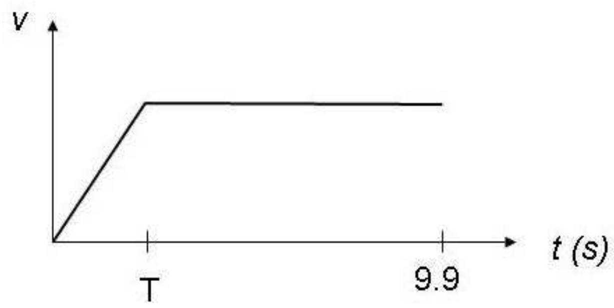
Aus (1) die Fallzeit (die Fallzeit entspricht dem Zeitpunkt t wann der Stein den Boden erreicht, $z = 0$):

$$0 = 6 + 5\ t - \frac{1}{2}\ 9.8\ t^2$$

Die quadratische Gleichung hat 2 Lösungen: $t = 1.7\ s$ und $t = -0.7\ s$. Die zweite Lösung hat keine physikalische Bedeutung.

$$v = v_0 - gt = 5 - 9.8 \cdot 1.7 = -11.66\ (m/s)$$

Aufgabe 11.
Die Weltrekorde für $100m$ Sprintstrecke sei $9,9s$. Ein einfaches Modell des Laufs: eine konstante Beschleunigung während der ersten T Sekunden, dann gleichmäßiger Lauf (s. das $v - t$-Diagramm).

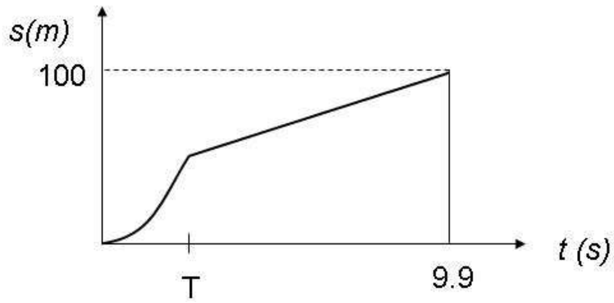


Gesucht werden das $s - t$-Diagramm, die Beschleunigung (sei $T = 3\,$s).
Der Weltrekord über $200m$ liege bei 19,5s. Anwendbarkeit des Modells auf das $200m$ Rennen.

Lösung:

1) Das $s - t$ Diagramm.

Man integriert die $v-t$-Kurve über die Zeit. Dabei wird der lineare Abschnitt parabolisch und der horizontale Abschnitt linear.



Innerhalb der ersten T Sekunden (t_1) eine beschleunigte Bewegung (die Strecke s_1), der Sprinter erreicht die maximale Geschwindigkeit $v = aT$, danach während der nächsten $(9.9 - T)\, s$ (t_2) eine gleichförmige Bewegung mit dieser Geschwindigkeit (die Strecke s_2):

$$s = s_1 + s_2 = \frac{1}{2}at_1^2 + v \cdot t_2$$

$$100 = \frac{1}{2}aT^2 + aT \cdot (9.9 - T) \qquad (1)$$

T ist gegeben, $3s \Rightarrow$

$$a = 3.97\ m/s^2$$

(1) für das 200 m Rennen:

$$200 = \frac{1}{2} \cdot 3.97 \cdot 3^2 + 3.97 \cdot 3 \cdot (t - 3)$$

$$t = 18.3\ s \quad \text{statt} \quad 19.5\ s\ -\ \text{das Modell gilt nicht für längere Strecken}$$

Aufgabe 12.

Ein Körper am Äquator erfährt eine Beschleunigung in Richtung Erdmittelpunktes (Zentripetalbeschleunigung). Aufgrund der Rotation der Erde um die Sonne auch eine Beschleunigung in Richtung der Sonne.

Gesucht werden die beide Beschleunigungen und die lineare Geschwindigkeiten; Gesamtbeschleunigung. ($R_E = 6400\, km$, $R_{EO} = 150000000\, km$)

Lösung:

Winkelgeschwindigkeit bei einer gleichförmigen Kreisbewegung $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (T - die Umdrehungsdauer).

$$T_E = 1\ Tag = 86400\ s \qquad T_{EO} = 1\ Jahr = 365 \cdot 86400 = 3.15 \cdot 10^7\ s$$

$$\omega_E = \frac{2\pi}{86400} = 7.27 \cdot 10^{-5}\ (s^{-1})$$

$$\omega_{EO} = \frac{2\pi}{3.15 \cdot 10^7} = 2 \cdot 10^{-7}\ (s^{-1})$$

$$\text{Skalare Gleichungen} \quad a_Z = \omega^2 R \qquad v = \omega R$$

$$a_{Z\ E} = (7.27 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6.4 \cdot 10^6 = 3.38 \cdot 10^{-2}\ (m/s^2)$$

$$v_E = \omega_E\ R = 7.27 \cdot 10^{-5} \cdot 6.4 \cdot 10^6 = 465\ (m/s) \quad (1674\ km/h)$$

$$a_{Z\ EO} = (2 \cdot 10^{-7})^2 \cdot 1.5 \cdot 10^{11} = 6.2 \cdot 10^{-3}\ (m/s^2)$$

$$v_{EO} = \omega_{EO}\ R = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 1.5 \cdot 10^{11} = 3 \cdot 10^4\ (m/s) \quad (109\ 000\ km/h)$$

Gesamtbeschleunigung

Am Mittag

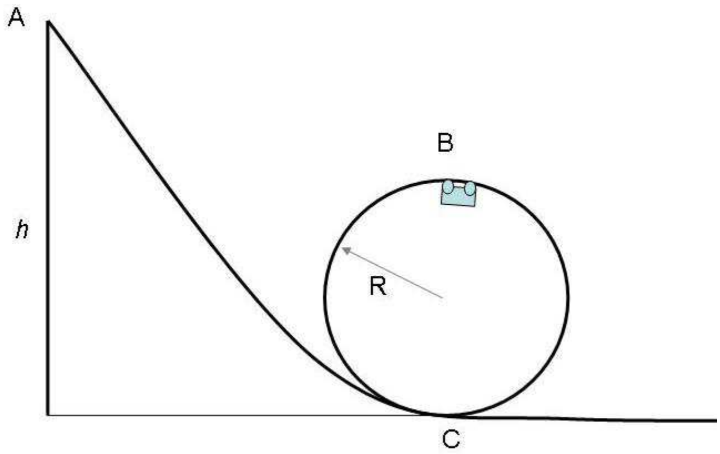
$$a_{Z\ Ges} = a_{Z\ E} - a_{Z\ EO} = 3.38 \cdot 10^{-2} - 6.2 \cdot 10^{-3} = 2.76 \cdot 10^{-2}\ (m/s^2)$$

Um Mitternacht

$$a_{Z\ Ges} = a_{Z\ E} + a_{Z\ EO} = 3.38 \cdot 10^{-2} + 6.2 \cdot 10^{-3} = 4.00 \cdot 10^{-2}\ (m/s^2)$$

Aufgabe 13.
Die neue Achterbahn in Europa-Park Rust *Blue Fire* hat einen Looping mit dem Radius R=16m.

Gesucht wid: Wie hoch muß der Abfahrtspunkt A liegen, damit der Wagen in B nicht herunterfällt?.



In Punkt C muss die Geschwindigkeit genügend hoch sein, um nicht nur den Punkt B zu erreichen, sondern noch eine Zentrifugalbeschleunigung zu sichern, die größer als die Erdbeschleunigung g ist.

Um den Punkt B nur zu erreichen (mit der Geschwindigkeit 0), muss der Abfahrpunkt in der gleichen Höhe $2R = 32\ m$ liegen.

In Punkt B muss noch die Restgeschwindigkeit v bleiben: $a_Z = \frac{v^2}{R} = g \Rightarrow v = \sqrt{gR}$

Zusätzliche Abfahrtshöhe um diese Geschwindigkeit zu schaffen aus der Bedingung $mgh = 1/2mv^2$, woraus folgt:

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$\sqrt{2gh} = \sqrt{gR} \qquad h = R/2$$

Insgesamt

$$h = 2R + 0.5R = 32 + 8 = 40\ (m)$$