Dynamik

Aufgabe 1.

Ein geostationärer Kommunikationssatellit folgt immer der Erddrehung, d.h. er befinden sich immer über demselben Punkt der Erdoberfläche am Äquator.

Gesucht werden die Höhe des Satelliten über der Erdoberfläche, seine Geschwindigkeit und der Betrag der Schwerkraft (in Einheiten g) auf dem geostationären Orbit.
(Gravitationskonstante $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$, Erdradius $R = 6\,370\ km$, Erdmasse $M_E = 6 \cdot 10^{24}\ kg$)

Lösung:

Bezeichnung: R - der Radius des Orbits.
Die Umdrehungsperiode des Satelliten ist 1 Tag= 86 400 s

$$\omega = \frac{2\pi}{86400} = 7.3 \cdot 10^{-5}\ 1/s$$

Zentripetalbeschleunigung $a_Z = \omega^2\ R$ (1)

Diese Beschleunigung wird von der zentripetalen Gravitationskraft bewirkt:

$$a_Z = \frac{F}{m_{Sat}} \qquad F = G\frac{m_{Sat} M_{Erde}}{R^2}$$

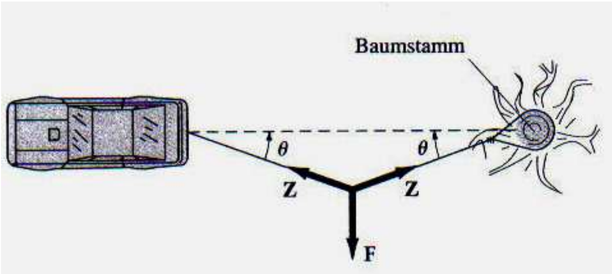
$$a_Z = G\frac{M_{Erde}}{R^2} \tag{2}$$

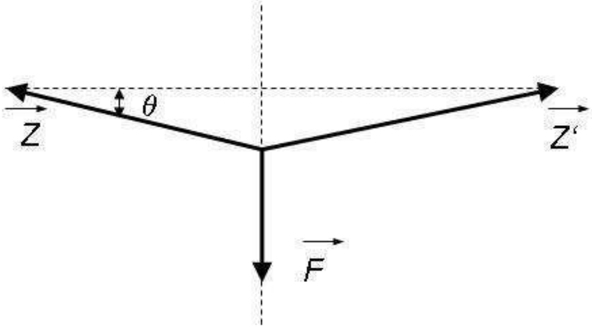
Aus (1) und (2): $\omega^2 R = G\frac{M_{Erde}}{R^2} \quad \Rightarrow \quad R^3 = \frac{G\ M_{Erde}}{\omega^2} = 75 \cdot 10^{21}\ m^3$

$R = 4.2 \cdot 10^7\ m = 42\ 000\ km \qquad h = R - R_{Erde} = 35\ 600\ km$

(Rest-)Erbeschleunigung $g' = \frac{F}{m_{Sat}} = G\frac{M_{Erde}}{R^2} = 0.23\ \frac{m}{s^2} \qquad g' = \frac{0.23}{9.81} = 0.023$

Aufgabe 2.





Ihr Wagen steckte in einem Schlammloch. Sie haben ein langes, reißfestes Seil dabei. Sie befestigen ein Ende des Seils am Auto und das andere Ende an einem Baumstamm und ziehen nun seitlich am Seil.

Gesucht wird die Kraft Z, die das Seil auf den Wagen ausübt, wenn $\theta = 3°$ und Sie mit $F = 400N$ am Seil ziehen (der Wagen bewegt sich noch nicht).

Lösung:

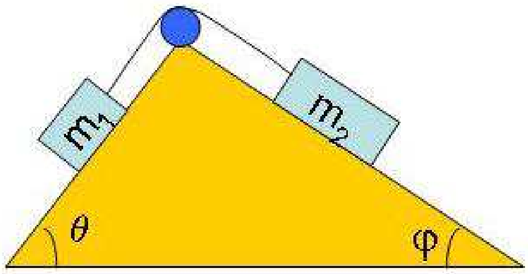
$$\sum_i \vec{F_i} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \vec{Z} + \vec{Z}' + \vec{F} = 0$$

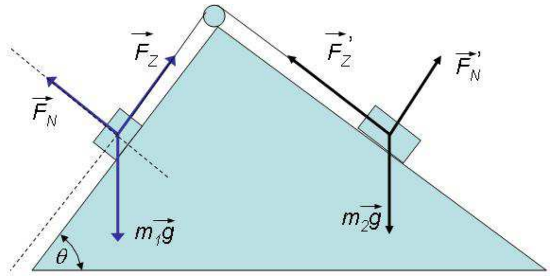
Projektion auf die y-Achse: $-F + 2 \cdot Z \; sin\theta = 0$

$$Z = \frac{F}{2 \; sin\theta} = \frac{400}{2 \cdot 0.052} = 3821 \; N$$

Aufgabe 3.
2 Massen seien über ein Seil, das über eine Rolle laufe, miteinander verbunden. Die Massen und das Seil gleiten reibungsfrei.

Gesucht wird die Bedingung für statisches Gleichgewicht (Zusammenhang zwischen m_1, m_2, θ, φ).





Lösung:

Statisches Gleichgewicht: $\vec{F}_Z + \vec{F}_N + m_1\vec{g} = 0$; $\vec{F}_Z' + \vec{F}_N' + m_2\vec{g} = 0$; $F_Z = F_Z'$

Projektion auf die tangentielle Richtung: $F_Z = m_1 g \; cos(90 - \theta) = m_1 g \; sin \; \theta$

$$F_Z' = m_2 g \; cos(90 - \varphi) = m_2 g \; sin \; \varphi$$

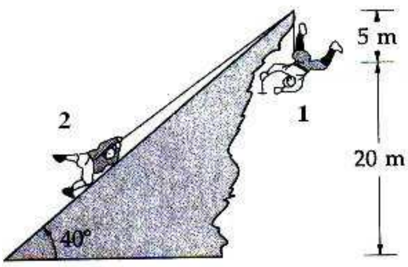
$$m_1 g \; sin \; \theta = m_2 g \; sin \; \varphi$$

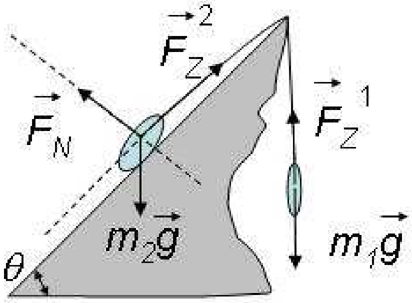
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{sin\varphi}{sin\theta}$$

Aufgabe 4.

2 Bergsteiger an einem vereisten (reibungsfreien) Abhang seien durch ein Seil ($l > 25m$) miteinander verbunden. Der obere Kletterer ($m = 52\,\text{kg}$) war einen Schritt zu weit gegangen. Sein Freund ($m_2 = 74\,\text{kg}$) hat senen Eispickel verloren. Zur Zeit $t = 0$ sei ihre Geschwindigkeit gleich 0. Der obere Bergsteiger fällt noch $5\,m$ frei bis das Seil sich spannt.

Gesucht wird die Spannkraft im Seil nach dem Sturz und die Geschwindigkeit mit der Bergsteiger 2 am Boden fällt (fällt oder wird gehoben?).





Lösung:

Aus der Aufgabe 3 für Bergsteiger 2: $F_Z = m_2 g\ sin\theta$ (wäre im Falle des statischen Gleichgewichtes gültig)

$$F_Z^2 = m_2 g sin\theta = 74 \cdot 9.81 \cdot 0.64 = 476\ (N) \qquad F_Z^1 = m_1 g = 520\ (N)$$

$F_Z^1 \neq F_Z^2 \Rightarrow$ kein statisches Gleichgewicht, es gibt eine resultierende Kraft $F = F_Z^2 - F_Z^1 = -44\ (N)$. Sie verursacht eine beschleunigte Bewegung des Systems Bergsteiger 1 + Bergsteiger 2 (Bergsteiger 1 bewegt sich nach unten, Bergsteiger 2 rutscht nach oben)

$$a = \frac{-44}{52 + 74} = -0.35\ m/s^2$$

Bevor die Kraft F bestimmt die Bewegung, fällt der Bergsteiger 1 im freien Fall $s' = 5\ m$ mit $g = 9.81\ m/s^2$ und erreicht die Geschwindigkeit v_0:

$$v_0 = gt$$

$$s' = \frac{1}{2}gt^2 \qquad 5 = \frac{1}{2}9.8 \cdot t^2 \qquad t = 1(s)$$

$$v_0 = gt = 10\ m/s$$

Für die nächste $s'' = 20\ m$: ($\vec{v}_0$ und $\vec{a}$ haben gleiche Richtung $\Rightarrow$ gleiches Vorzeichen; nehmen wir die Richtung nach unten als positiv an)

$$s^{''} = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad 20 = 10 \cdot t + 0.5 \cdot 0.35 \cdot 1^2 \quad - \quad \text{quadratische Gleichung}$$

Zwei Lösungen: $t = -59s$ und $t = 1.93s$. Die negative Lösung hat keine physikalsiche Bedeutung.

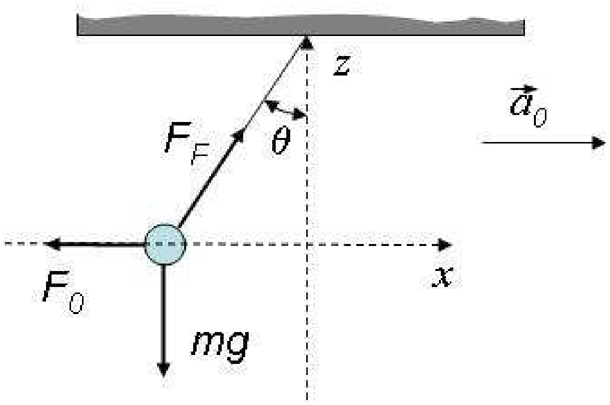
$v = v_0 + at = 10 + 0.35 \cdot 1.93 = 10.68\ (m/s)$

Spannkraft:
Die kleinste Kraft bestimmt die Spannung im Seil: $F_{Sp.} = 476\ (N)$

Aufgabe 5.

Ein kleiner Körper hängt an einem Faden in einem Fahrzeug am Autodach auf. Wenn eine Beschleunigung auftritt, wird der Körper ausgelenkt, und der Faden wird einen bestimmten Winkel θ zur Vertikalen aufweisen. Das Auto fährt mit $60\,km/h$. Es wird nun gleichmäßig innerhalb von $60\,m$ abgebremst, bis es zum Stillstand kommt.

Welchen Winkel θ zeigt der Faden an?



Lösung:

Zum Bild: Das Auto fährt nach links; es bremst $\Rightarrow$ die Beschleunigung $\vec{a}_0$ ist negativ (der Geschwindigkeit entgegen) $\Rightarrow$ $\vec{a}_0$ hat die Richtung nach rechts.

1) Die wirkende Kräfte: Federkraft des Fadens $\vec{F}_F$, Schwerkraft $m\vec{g}$, Trägheitskraft $\vec{F}_0 = -m\vec{a}_0$, die in einem nichtinertiellen System wirkt und die Richtung entgegen der Beschleunigung des Systems hat.

Projektion auf die z-Achse: $F_F\ cos\theta - mg = 0 \Rightarrow$

$$F_F = \frac{mg}{cos\theta}$$

Projektion auf die x-Achse: $-F_0 + F_F\ sin\theta = 0$

$$ma_0 = \frac{mg}{cos\theta}\ sin\theta$$

$$a_0 = g\ tg\theta$$

2) $v_0 = 60\ km/h = 16.7\ m/s$

$a_0 = \frac{v_0 - 0}{t} \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{v_0}{a_0} \qquad (1)$

$s = v_0 t - \frac{1}{2} a_0 t^2$ setzen t aus (1) ein

$60 = v_0 \cdot \frac{v_0}{a_0} - \frac{1}{2} a_0 \frac{v_0^2}{a_0^2} = \frac{1}{2}\ \frac{v_0^2}{a_0}$

$a_0 = \frac{1}{2}\ \frac{16.7^2}{60} = 2.31\ m/s^2$

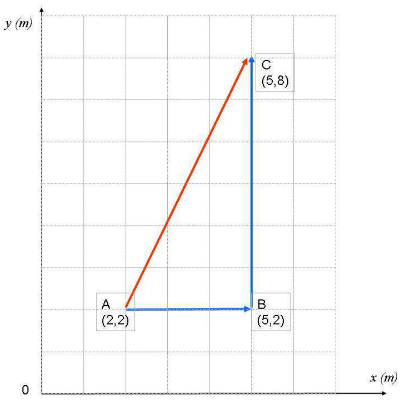
3) $tg\theta = \frac{a_0}{g} = 0.23 \Rightarrow \theta = 13°$

Arbeit und Energie

Aufgabe 6.

Eine Kraft $\vec{F} = kx^2\,\vec{e}_x$ wirke auf ein Teilchen. Das Teilchen legte die folegenden Strecken zurück:
a) parallel zur x-Achse vom Punkt A zum Punkt B, dann parallel zur y-Achse zum Punkt C,
b) direkt vom Punkt A zum Punkt C.

Bestimmen Sie die am Teilchen verrichtete Arbeit für beide Strecken a) und b). ($k = \ 2\,N/m^2$)



Lösung:

a) indirekter Weg $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$.
Für $\vec{AB}$: $d\vec{s} = \vec{e}_x \cdot dx$

$$W_{AB} = \int_2^5 2x^2 \cdot \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x \cdot dx = \frac{2}{3}x^3|_2^5 = 83\frac{1}{3} - 5\frac{1}{3} = 78\ (J)$$

$$W_{BC} = 0, \text{ weil } d\vec{s} = \vec{e}_y \cdot dy \perp \vec{F} \qquad W_{AC} = W_{AB} + W_{BC} = 78 + 0 = 78\ (J)$$

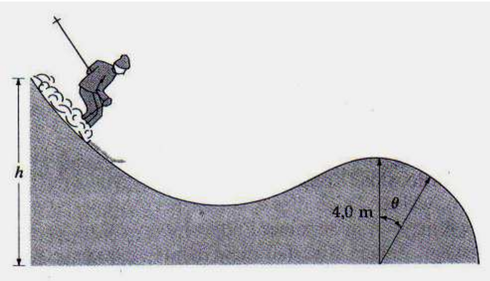
b) Für den direkten Weg $\vec{AC}$:

$$d\vec{s} = \vec{e}_x \cdot dx + \vec{e}_y \cdot dy = (\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \cdot dx, \qquad \text{weil } dy = 2dx \text{ (NB: die Gerade AC ist } y = 2x)$$

$$W_{AC} = \int_A^C 2x^2 \vec{e}_x d\vec{s} = \int_2^5 2x^2 \cdot \vec{e}_x(\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \cdot dx = \int_2^5 2x^2 dx = \frac{2}{3}x^3|_2^5 = 83\frac{1}{3} - 5\frac{1}{3} = 78\ (J)$$

$$(\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1;\ \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0)$$

Aufgabe 7.
Ein Skifahrer starte in einer Höhe h über dem Mittelpunkt einer Kuppe mit dem Radius $R = 4\,m$.
Gesucht wird die maximale Höhe h, bei der der Skier oben auf der Kuppe noch mit dem Schnee in Kontakt bleibt.



Lösung:

Über die Kuppe zu fahren = eine kreisförmige Bewegung auszuführen.

Ein Körper bleibt an der Kreisbahn, wenn eine Zentripetalkraft die Zentripetalbeschleunigung

$$a_Z = \frac{v^2}{R} \quad \text{bewirkt.}$$

In unserem Fall ist diese Kraft die Schwerkraft $\Rightarrow a_Z < g$

$$g > \frac{v^2}{R}$$

$$v^2 < gR$$

Die Geschwindigkeit v ist nur von den Start- und Endzuständen bestimmt (und nicht vom Weg - Schwerkraftfled ist konservativ!), d.h. von der Höhedifferenz $h - R$. Aus dem Energieerhaltungssatz

$$mg(h - R) = \frac{mv^2}{2} < \frac{mgR}{2} \quad (: mg)$$

$$h - R < \frac{R}{2}$$

$$h < 1.5R = 6\ m$$

Aufgabe 8.
Die potentielle Energie eines Körpers der Masse m im Erdschwerefeld ist $E_{pot} = mgh$.

Leiten Sie die Schwerkraft her, indem Sie den Gradientenoperator in allgemeiner Form benutzen ($\mathbf{grad}E = \frac{\partial E}{\partial x}\,\vec{e}_x + \frac{\partial E}{\partial y}\,\vec{e}_y + \frac{\partial E}{\partial z}\,\vec{e}_z$).

Lösung:

Im kartesischen Koordinatensystem ist die Höhe h die z-Koordinate und somit $E_{pot} = mgz$

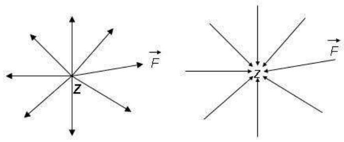
$$\vec{F} = -\mathbf{grad}(mgz) = -\frac{\partial(mgz)}{\partial x}\,\vec{e}_x - \frac{\partial(mgz)}{\partial y}\,\vec{e}_y - \frac{\partial(mgz)}{\partial z}\,\vec{e}_z = 0 - 0 - mg\,\vec{e}_z = m\vec{g}$$

($\vec{g}$ hat die Richtung entgegen der Richtung der z-Achse: $\vec{g} = -g \cdot \vec{e}_z$)

Aufgabe 9.
Die Gravitation und die Coulomb-Kraft stellen Beispiele für Zentralkräfte dar.
Im Kugelkoordinatensystem mit dem Ursprung Z hat eine Zentralkraft folgende Form

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \cdot \vec{e}_r \,,$$

wobei Z das Kraftfeldzentrum ist (z.B. eine Punktmasse oder eine Punktladung).



Zeigen Sie, dass das Kraftfeld einer Zentralkraft konservativ ist.

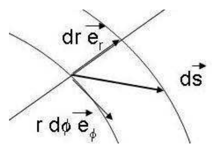
Lösung:

Das Merkmal eines Konservativkraftfeldes ist die Gültigkeit der Gleichung

$$\oint \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{s} = 0$$

Wir betrachten die Aufgabe (der Einfachheit halber) im Polarkoordinatensystem (2D Fall), wo

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \cdot \vec{e}_r \quad \text{und} \quad d\vec{s} = \vec{e}_r \cdot dr + \vec{e}_\varphi \cdot r d\varphi$$



$$\oint \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{s} = \oint F(r) \cdot \vec{e}_r \;(\vec{e}_r \cdot dr + \vec{e}_\varphi \cdot r d\varphi) = \oint F(r)\, dr = \int_{r_1}^{r_1} F(r)\, dr = \mathbf{F}(r_1) - \mathbf{F}(r_1) = 0$$

wobei $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = 1$; $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = 0$,
$\mathbf{F}(r)$ die Stammfunktion von $F(r)$,
r_1 ein (beliebiger) Start- und Endpunkt eines geschlossenen Weges.