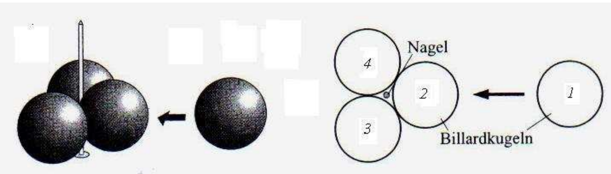
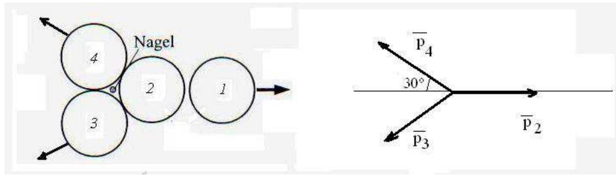
Impuls

Aufgabe 1(s. VO6).

Gesucht werden die Geschwindigkeiten aller Kugeln (gleicher Masse) nach dem elastischen Stoß. Die Geschwindigkeit der Kugel 1 vor dem Stoß war $v = 5\,m/s$.



nach dem Stoss



Lösung:

Schritt 1: Beim Stoß der Kugel 1 mit der K.2 überträgt die erste ihren Impuls vollständig auf die K.2 und bleibt stehen. Schritt 2: Kugel 2 stosst weiter auf eine größere Masse (K.3+K.4), deshalb wird zurückgeworfen.

(Bezeichnung: m - die Massen der Kugel)
Vor dem Stoß besitzt Kugel 1 den Impuls $\vec{p_1}$: $p_1 = 5m$
Kinetische Energie der Kugel 1: $W_{kin} = 1/2m5^2 = 12.5m$

Impulserhaltung: $\vec{p_4} + \vec{p_3} + \vec{p_2} = \vec{p_1}$, wobei $p_3 = p_4$
Projektion auf die x-Achse: $2p_3 cos 30° - p_2 = 5m$ (1)

Energieerhaltung: $2 \cdot \frac{p_3^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} = 12,5m$ (2)

Aus (1): $p_2 = \sqrt{3}p_3 - 5m$ (1a); setzen in (2) ein:

$$\frac{2p_3^2}{2m} + \frac{(\sqrt{3}p_3 - 5m)^2}{2m} = 12,5m$$

$$2p_3^2 + 3p_3^2 - 10\sqrt{3}mp_3 + 25m^2 = 25m^2$$

$$5p_3^2 = 10\sqrt{3}mp_3$$

$p_3 = 2\sqrt{3}m$ (noch eine Lösung $p_3 = 0$ verletzt die Stoßgesetze).

$p_4 = p_3 = 2\sqrt{3}m$, Geschwindigkeiten $v_4 = v_3 = 2\sqrt{3}$ (m/s)

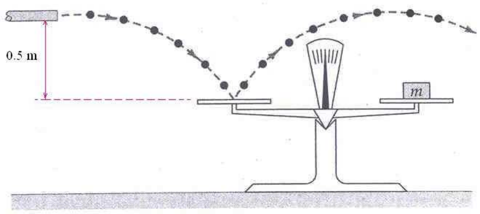
Aus (1a) : $p_2 = 6m - 5m = m$, Geschwindigkeit $v_2 = 1$ m/s in Richtung der Kugel 1.

Schritt 3: Kugel 2 überträgt ihren Impuls auf die Kugel 1 und bleibt stehen, Kugel 1 rollt mit $v_1 = 1$ m/s

(Achtung! die Kugel sind *Massenpunkte*, ansonsten muss man auch die Rotationsenergie berücksichtigen)

Aufgabe 2.
Ein Strom von 20 Kügelchen pro Sekunde mit jeweils der Masse $0.5\,g$ trete aus einem horizontalem Röhrchen aus. Die Kügelchen fallen $0.5\,m$ tiefer auf die Schale einer Waage und prallen von Ihr so ab, dass sie die ursprungliche Höhe wieder erreichen.

Wie groß muß die Masse in der anderen Waageschale sein, damit der Zeiger in der Mitte stehenbleibt?.



Lösung:

Das 2. Newtonsche Axiom in der Impuls-Form: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ (Impulsübertragung von den Kugeln an die Waageschale pro Zeiteinheit).

Wegen der relativ höhen Stoßfrequenz 20 Hz und der Trägheit der Waageschale kann man die Serie von kurzen Kraftstößen durch eine durchschnittliche permanente Kraft approximieren.

Vertikale Kraft wird gesucht $\Rightarrow$ nur die z-komponente des Impulses relevant: $\vec{p}_z = m\vec{v}_z$

v_z aus der kinetischen Energie $W_{kin} = 1/2mv_z^2$. Die Kugel erreichen nach dem Stoß die gleiche Höhe $\Rightarrow$ elastischer Stoß

$W_{kin} = W_{pot} \qquad \frac{mv^2}{2} = mgh \Rightarrow$

$v_z = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 0.5} = 3.13\ (m/s)$

$p_z = 0.5 \cdot 10^{-3} \cdot 3.13 = 0.00157\ (kg\,m\,s^{-1})$

Impulsänderung beim elastischen Stoß gegen einen massiven Gegenstand:

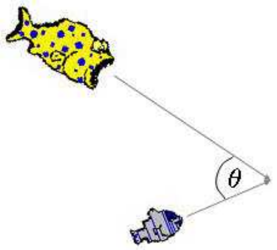
$\Delta p = p_z - (-p_z) = 2p_z = 0.00314\ (kg\,m\,s^{-1})$

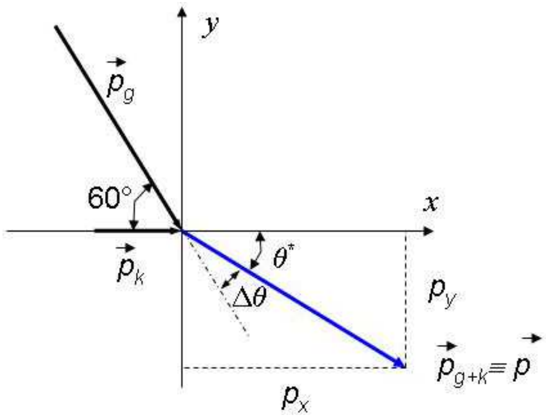
$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{0.00314}{0.05} = 0.06\ (N) \qquad \Delta t = 1/20 = 0.05\ (s)$

$m = \frac{F}{g} = 0.006\ (kg)$

Aufgabe 3.

Der große Fisch hat die vierfache Masse des kleinen Fisches. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der große Fisch, nachdem er den kleinen verschluckt hat, wenn sich der große Fisch mit $5\,m/s$ und der kleine Fisch mit $2\,m/s$ bewegte und der Winkel zwischen ihren Bewegungsrichtungen θ =60° betrug? Um welchen Winkel ändert sich dabei die Schwimmrichtung des großen Fishes?





Lösung:

Bezeichnung: Die Masse des größen Fisches $4m$, des kleinen m.

Ursprungliche Impulse der Fische (Beträge):

$p_g = 4m \cdot 5 = 20m$ $\qquad$ $p_k = m \cdot 2 = 2m$

Impulserhaltung: $\vec{p}_g + \vec{p}_k = \vec{p}_{g+k} \equiv \vec{p}$

x-Projektion: $2m + 20m \cdot cos60° = p_x \quad \Rightarrow \quad p_x = 12m$

y-Projektion: $-20m \cdot sin60° = p_y \quad \Rightarrow \quad p_y = -17.3m$

Geschwindigkeiten:

die Masse des größen Fisches mit dem verschluckten kleinen Fisch $4m + m = 5m$

$v_x = 12m/5m = 2.4\,(m/s)$

$v_y = -17.3m/5m = -3.46\,(m/s)$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 4.2\,(m/s)$

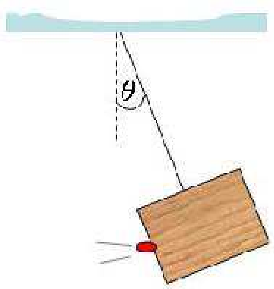
Schwimmrichtungsänderung:

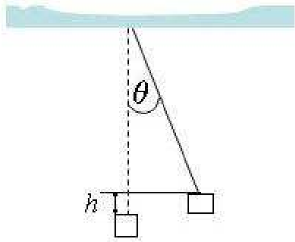
$\vec{p}$ liegt relativ zu der x-Achse unter dem Winkel θ^*

$tg\theta^* = \frac{|p_y|}{p_x} = 1.442 \qquad \theta^* = 55.3° \qquad \Delta\theta = \theta - \theta^* = 60° - 55.3° = 4.7°$

Aufgabe 4.

An einem Faden der Länge $L = 1\,m$ hängt ein Holzklotz mit der Masse $m_1 = 1\,kg$. Eine Kugel ($m_2 = 20\,g$) wird mit der Geschwindigkeit $v = 100\,m/s$ in den Klotz geschossen und bleibt dort stecken. Wie groß ist der maximale Auslenkwinkel des Klotzes?





Lösung:

Impuls der Kugel: $p_K = 0.02 \cdot 100 = 2\,(kg\ m/s)$

Gesamtimpuls des Systems Kugel+Klotz $\qquad p = p_K + 0 = 2\,(kg\ m/s)$

$v = \frac{p}{m_K + m_{Kl}} = \frac{2}{1.02} = 1.96\,(m/s)$

$W_{kin} = 1/2 \cdot 1.02 \cdot 1.96^2 = 1.96\,(J)$

Die Auslenkung des Klotzes findet im Schwerkraftfeld statt (konservativ! D.h. nur die Höhe der Auslenkung ist von Bedeutung)

Energieerhaltungssatz: $W_{kin} = W_{pot} = mgh$

$h = \frac{W_{kin}}{mg} = \frac{1.96}{9.8 \cdot 1.02} = 0.196\,(m)$

$cos\theta = \frac{0.804}{1.0} = 0.804 \qquad \theta = 36.5°$

Schwerpunkt, Drehimpuls, Drehmoment

Aufgabe 5.

Das Verhältnis von Erd- zu Mondmasse ist 81.3. Der Erdradius beträgt 6370 km und der Abstand Erde-Mond 384 000 km. Wo liegt der Erde-Mond-Schwerpunkt relativ zur Erdoberfläche?

Lösung:

Ortsvektor des Schwerpunktes: $\vec{r}_S = \frac{\sum_i m_i \ \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$. Es liegt den 1D Fall vor.

Der Abstand zwischen den Massenzentren (den Mondradius kann man vernachlässigen)

$r_{E-M} = 384000 + 6370 \approx 390\ 000\ km$

Man wählt den Koordinatenursprung am Erdmittelpunkt:

$$r_S = \frac{M_E \cdot 0 + M_M \cdot 390\ 000}{81.3\ M_M + M_M} = 4740\ (km)$$

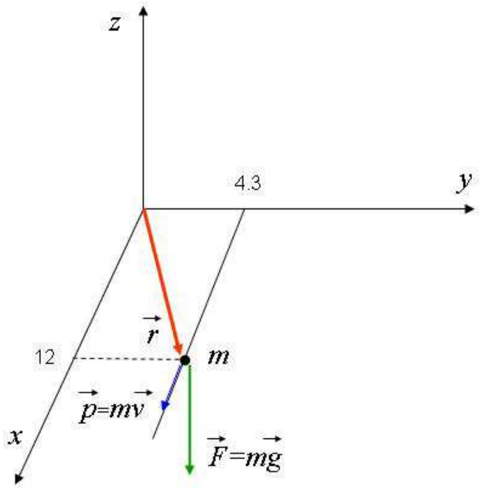
$h = 4743 - 6270 = -1630\ (km)$ - Der E-M-Schwerpunkt liegt 1630 km unter der Erdoberfläche.

Aufgabe 6.

Ein Körper der Masse $3\,kg$ bewege sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = (2\,m/s)\,\vec{e}_x$ entlang der Geraden $z = 0$, $y = 4.3m$

Gesucht werden das Drehmoment und der Drehimpuls relativ zum Ursprung, wenn sich der Körper am Ort $x = 12\,m$ befindet.

Lösung:



$$\vec{D}_M = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{p} = m\,\vec{v} = 6\,\vec{e}_x\,(m/s) \qquad \vec{F} = m\vec{g} = -30\,\vec{e}_z\,(N)$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4.3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -30 \end{pmatrix} \qquad \vec{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{D}_M = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 12 & 4.3 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{pmatrix} = -30\,(4.3\,\vec{e}_x - 12\,\vec{e}_y) = -129\,\vec{e}_x + 360\,\vec{e}_y\,(kg\ m^2\ s^{-2})$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 12 & 4.3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 6\,(0 - 4.3\,\vec{e}_z) = -25.8\,\vec{e}_z\,(kg\ m^2\ s^{-1})$$